



8. Karpushchenko N.I., Velichko D.V., Bobovnikova N.A. Vliyanie shiriny kolei i sostoyaniya khodovykh chastei podvizhnogo sostava na intensivnost' iznosov [Influence of the track width and the condition of running parts of rolling stock on the intensity of deterioration]. *Transport Rossiiskoi Federatsii* [Transport of the Russian Federation], 2010, No.3 (28), pp. 10–14.
9. Instruksiya po osmotru i osvidetel'stvovaniyu kolesnykh par vagonov [Instructions for inspection and inspection of wheelsets of wagons]. Ulaanbaatar Railways Publ., 2009.
10. Pravila tekhnicheskoi ekspluatatsii [Rules of technical operation]. Ulaanbaatar Railways Publ., 2007.
11. Kuznetsov V.M. Ob ostrokonechnom nakate na grebnyakh kolesnykh par [On the pointed ridge on the crests of wheelsets]. *Put' i putevoe khozyaistvo* [Railway Track and Facilities], 2000, No. 9, pp. 16–19.
12. Korneev S.A. et al. Raschetno-eksperimental'nyi metod opredeleniya material'nykh parametrov uprugoplasticheskikh materialov na traektoriyakh aktivnogo deformirovaniya maloi krivizny [A computational experimental method for determining the material parameters of elastoplastic materials on the trajectories of active deformation of small curvature]. *Omskii nauchnyi vestnik* [Omsk scientific bulletin], 2006, No. 4 (38), pp. 86–90.
13. Kuz'min O.V. Kombinatornye metody modelirovaniya diskretnykh raspredelenii [Combinatorial methods for modeling discrete distributions]. Irkutsk: Irkut. state un-ty Publ., 2006, 138 p.
14. Dokin V.N., Kuz'min O.V. O randomizatsii B-raspredelenii [On the randomization of B-distributions]. *Kombinatornye i veroyatnostnye problemy diskretnoi matematiki : sb. nauch. tr.* [Combinatorial and probabilistic problems of discrete mathematics: coll. of sci. works] Irkutsk: Irkut. state un-ty Publ., 2010, pp. 34–46.
15. Gmurman V.E. Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii veroyatnosti i matematicheskoi statistiki [A guide to solving problems in probability theory and mathematical statistics]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1979.

УДК 629.734/.735, 519.635.4

DOI: 10.26731/1813-9108.2017.3(55).168-174

Скоробогатова Марина Викторовна,
старший преподаватель, Иркутский филиал МГТУ ГА,
e-mail: skorobogatova.mv@if-mstuca.ru

M. V. Skorobogatova,
Asst. Prof., the Irkutsk branch of Moscow State Technical Uni-
versity of Civil Aviation
e-mail: skorobogatova.mv@if-mstuca.ru

Аршинский Леонид Вадимович,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
e-mail: larsh@mail.ru

L. V. Arshinskiy
Irkutsk State Transport University
e-mail: larsh@mail.ru

Информация о статье
Дата поступления: 08 августа 2017 г.

Article info
Received: August 8, 2017

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ НИЗКОЛЕТЯЩЕГО КРЫЛА КАК ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ «ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ - ПОВЕРХНОСТЬ»

A METHOD OF NUMERICAL DETERMINATION OF OPTIMAL SHAPE OF A GROUND-EFFECT WING AS A ELEMENT OF THE “AIRCRAFT–SURFACE” SYSTEM

Аннотация. В статье рассмотрена проблема выбора оптимальной профилировки нижней поверхности прямоугольного в плане низколетящего крыла с прямолинейной задней кромкой, движущегося в стационарном потоке на сверхмалом расстоянии от твердой границы при умеренных возмущениях. Сам летательный аппарат рассматривается как часть системы «летательный аппарат - поверхность», неотъемлемым компонентом которой является крыло. Особенностью движения в таких условиях является существенная зависимость устойчивого движения аппарата от его аэродинамической компоновки и формы несущей поверхности. При этом основной вклад в соответствующие аэродинамические характеристики вносит нижняя поверхность, расчету которой и посвящена работа.

Задача решается с помощью метода Релея - Ритца, который является частным случаем метода пробных функций. Особенностью математической постановки задачи является ее некорректность, связанная с перегруженностью граничными условиями: их число превышает порядок дифференциального уравнения необходимого условия экстремума. Решение искалось на так называемых крыльях Мунка, известных тем, что они обеспечивают минимум индуктивного сопротивления при заданной подъемной силе. Полученный результат сравнивается с существующими результатами в этой области. Делается вывод, что форма крыла, повышающего самостабилизированность летательного аппарата, качественно близка форме крыла с максимальной подъемной силой, исследованной ранее.

Ключевые слова: Теория оптимальной несущей поверхности, низколетящее крыло, самостабилизация, метод Релея - Ритца, крыло Мунка.

Abstract. The article deals with the problem of the choice of optimum profiling of the lower surface rectangular in respect of the low-flying wing with a rectilinear back edge moving in a stationary stream on a midjet distance from firm border at moderate indignations. The aircraft is considered as a part of system the flying device surface which integral component is the wing. Feature of the movement in such conditions is essential dependence of the steady movement of the device on its aerodynamic configuration and a form of the bearing surface. At the same time the main contribution to the corresponding aerodynamic characteristics is made by the lower surface to which calculation work is devoted. The problem is solved with help of the Rayleigh-Ritz method which is a special case of a method of trial functions. Feature of mathematical problem definition is its incorrectness connected with congestion boundary conditions: their number exceeds an order of the differential equation of a necessary condition of an extremum. The decision was looked for with so-called Munk wings known for that they provide a minimum of inductive resistance with the set carrying power. The obtained result is



compared with the existing results in this area. It is concluded that the shape of the wing, which increases the self-stabilization of the aircraft, is qualitatively close to the shape of the wing with the maximum lifting force, investigated earlier.

Keywords: theory of bearing surface optimization, wing with ground effect, self-stabilization, Rayleigh-Ritz method, Munk wing.

Введение

Говоря об оптимальности того или иного летательного аппарата (ЛА) часто имеют в виду достижение его максимальной экономичности, способности нести максимум полезного груза на наибольшее расстояние и т. п. Подобные задачи решались еще на заре авиастроения. Однако еще одним направлением поиска оптимальных аэродинамических форм служит проблема устойчивого движения низколетящих ЛА. Эта задача всесторонне исследовалась в 70-80-х гг. XX в. представителями школы А. Н. Панченкова [1]. В отличие от распространенного «авиационного» подхода, связанного с попытками обеспечить устойчивость низколетящего ЛА применением самолетной схемы со стабилизатором, вынесенным из зоны влияния твердой границы (см., напр., [2]), А. Н. Панченков с коллегами занимался разработкой аппаратов по схеме «утка». Если у самолетной схемы устойчивости добиваются выносом хвостового стабилизатора из зоны влияния опорной поверхности вверх [2], у ЛА, построенных по схеме «утка», этого же стремятся добиться совместной работой носового стабилизатора и основного крыла у опорной поверхности. Связанные между собой крыло и стабилизатор действуют при этом как единая система, испытывающая влияние границы раздела сред. Если в первом случае влиянию твердой границы подвергается единственное крыло, то во втором – пара связанных между собой крыльев (несущих поверхностей). В диссертации [3] показано, что для такой системы целесообразно искать критерии ее *самостабилизированности*, проводя аналогию с остойчивостью корабля. Основной характеристикой стабилизированности при этом выступает метацентрическая высота («корабельный» подход).

Традиционно проблему обеспечения стабилизации летательных аппаратов вблизи опорной поверхности пытаются решить двумя путями:

- созданием автоматической системы стабилизации;
- разработкой специальной геометрической формы несущих поверхностей ЛА, а также их компоновкой в аэродинамической схеме. Такой способ называют аэродинамической стабилизацией.

Для малых и средних ЛА решением проблемы самостабилизации может быть выбор специальной конфигурации крыла, тогда как с увеличением полетной массы ЛА предпочтительнее оснащать системой автоматической стабилизации. Также перспективны комбинирован-

ные системы [1]. В любом случае перед проектировщиками для решения проблем безопасности и экономичности полетов ставится проблема выбора наиболее подходящей (оптимальной) конфигурации летательного аппарата и его главных несущих элементов – крыльев.

Рассмотрим систему, состоящую из низколетящего крыла конечного размаха, обтекающего потока идеальной жидкости (без учета вязкости) и твердой поверхности – грунта, льда и т. д. (рис. 1).

Полагаем, что крыло находится на сверхмалом отстоянии от границы раздела сред различной плотности, составляющем порядка или менее 10 % хорды крыла.

В рассматриваемой оптимизируемой системе (крыло, твердая граница, поток) на стационарный поток и границу раздела сред повлиять невозможно, поэтому объектом проектирования является несущая поверхность.

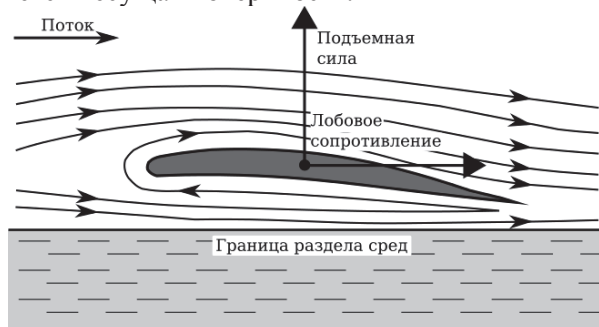


Рис. 1. Изолированное низколетящее крыло у границы раздела сред

Основной вклад в аэродинамические характеристики низколетящего крыла вносит его нижняя поверхность, поэтому верхняя поверхность из рассматриваемой системы исключается – она подбирается таким образом, чтобы удовлетворить условию замкнутости [6].

Как известно, эффективность крыла определяется набором аэродинамических характеристик (АДХ). С точки зрения аэродинамики наиболее выигрышным будет такое крыло, которое обладает способностью создавать максимальную подъемную силу при наименьшем лобовом сопротивлении. Подъемная сила и лобовое сопротивление летательного аппарата находятся в прямой зависимости от геометрических характеристик несущей поверхности, которые складываются из характеристик крыла в плане, характеристик профиля и характеристик задней кромки.

Крыло, взаимодействуя со стационарным потоком, вносит в него возмущения. Параметром



возмущения служит отношение $\varepsilon = \frac{\alpha(g)}{\bar{h}(g)}$,

где α – местный угол атаки, \bar{h} – местное относительное отстояние в точке g , лежащей на поверхности крыла.

Исходя из величины параметра ε , для крыла вблизи твердой границы выделяют следующие варианты теорий:

- 1) $\varepsilon \ll 1$ – теория малых возмущений;
- 2) $\varepsilon \sim 1$ – теория умеренных возмущений;
- 3) $\varepsilon \gg 1$ – теория сильных возмущений.

В рассматриваемой системе возмущения полагаются умеренными.

Первые результаты по определению геометрии плоского крыла вблизи границы раздела сред с минимальным индуктивным сопротивлением были получены в 1936 году П. Халлером. Он показал, что для плоского крыла вблизи границы раздела сред минимум индуктивного сопротивления реализуется при параболическом по размаху распределении циркуляции. Одним из первых исследователей, кто заговорил о влиянии аэродинамических производных на устойчивость низколетящего летательного аппарата, был Р. Д. Иродов [2]

Позднее были рассмотрены и решены другие задачи.

Характерной особенностью теории оптимальной несущей поверхности является то, что ее экстремальные задачи часто можно классифицировать как некорректные экстремальные задачи вариационного исчисления. Некорректность связана с избытком граничных условий, накладываемых на экстремаль, так, что их число превышает порядок дифференциального уравнения необходимого условия экстремума. Выявление этой особенности позволило сформировать особую теорию и специфические методы ее алгоритмизации [5]. Также при решении задач оптимизации несущей поверхности особую роль играет условие Мунка в оптимальной несущей поверхности (ТОНП) [6]. Учитывая, что несущие поверхности, удовлетворяющие ОУМ, имеют меньшее индуктивное сопротивление при заданной подъемной силе, решение экстремальных задач ищутся на крыльях Мунка.

Несмотря на определенные успехи в области оптимального проектирования низколетящего крыла при умеренных возмущениях, не для всех подобных задач удается найти аналитические решения. Это вынуждает к обстоятельному изучению возможности использования специальных математических методов для исследования подобных задач, а также к поиску других, возможно не

аналитических, способов решения. Одним из таких методов является метод Ритца [5], когда задача на нахождение минимума квадратичной функции $F(a)$ посредством дифференцирования по переменным a_k сводится к системе алгебраических линейных уравнений. Численное решение такой системы не вызывает затруднений даже при числе параметров $n \sim 100 - 200$.

Постановка задачи. В качестве критерия самостабилизации судна на динамической воздушной подушке можно взять метацентрическую высоту, формула которой получена в [3]:

$$H_M = \frac{C_y^g}{C_y} \left(\frac{C_m^g}{C_y^g} - \frac{C_m^h}{C_y^h} \right)$$

Для увеличения метацентрической высоты достаточно максимизировать один из сомножителей либо каждый из них:

$$\frac{C_y^g}{C_y} \rightarrow \max \text{ и/или } \left(\frac{C_m^g}{C_y^g} - \frac{C_m^h}{C_y^h} \right) \rightarrow \max.$$

Задача максимизации второго сомножителя равнозначна задачам максимизации первого слагаемого и/или минимизации второго:

$$\frac{C_m^g}{C_y^g} \rightarrow \max \text{ и/или } \frac{C_m^h}{C_y^h} \rightarrow \min.$$

Рассмотрим задачу $\frac{C_m^h}{C_y^h} \rightarrow \min$ и сформулируем ее следующим образом: определить геометрию крыла с максимальным значением коэффициента аэродинамической производной подъемной силы C_y по отстоянию h при фиксированном значении коэффициента аэродинамической производной момента тангажа C_m по отстоянию

h : $\begin{cases} C_m^h = \text{const} \\ C_y^h \rightarrow \max. \end{cases}$

При решении такого рода изопериметрических задач в качестве функционала используется сумма $\Phi_1 + \rho \Phi_2$. В нашем случае $\Phi_1 = C_y^h$, $\Phi_2 = C_m^h$, ρ – произвольная константа.

Задача $C_y^h \rightarrow \max$ решена в [4]. В этой же работе предложена формула коэффициента производной момента тангажа по отстоянию C_m^h . Результаты получены в приближении умеренных возмущений.

$$C_m = \frac{\lambda \eta_i}{2\lambda_0 \bar{H}_0} \int_0^1 \frac{F(y)}{\bar{\lambda}(y)} dy - \frac{\lambda \eta_i}{8\lambda_0^2 \bar{H}_0^2} \int_0^1 \frac{F_1(y)}{\bar{\lambda}(y)} dy +$$

$$+ \frac{\alpha_i \lambda^2}{8\lambda_0^2 \bar{H}_0^2} \int_0^1 \frac{dy}{\bar{\lambda}(y)} \int \bar{\lambda}^2(y_1) F(y_1) F_{y_1}(y_1) dy_1 -$$

$$- \frac{\alpha_i^2 \lambda^2}{8\lambda_0^2 \bar{H}_0^2} \int_0^1 \int_0^1 [\bar{\alpha}_{ix}^2(x) F^2(y) -$$

$$- \frac{\bar{\alpha}_i^2(x)}{\lambda^2} \left(\frac{F_y^2(y)}{\bar{\lambda}^2(y)} - \frac{1}{\bar{\lambda}(y) \bar{\lambda}_1 \bar{H}_1^2} \right)] dx dy,$$

$$C_y = \frac{\alpha_i \lambda}{2\bar{H}_0} \int_0^1 F(y) dy - \frac{\alpha_i^2 \lambda^2}{8\bar{H}_0^2} \int_0^1 \int_0^1 [\bar{\alpha}_{ix}^2(x) \bar{\lambda}(y) F^2(y) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^2} \bar{\alpha}_i^2 \left(\frac{F_y^2(y)}{\bar{\lambda}(y)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_1 \bar{H}_1^2} \right)] dx dy,$$

$$\text{где } F(y) = \int_y^1 \frac{y_1 dy_1}{\bar{H}(y_1)}, F_1(y) = \int_y^1 \frac{y_1 dy_1}{\bar{H}^2(y_1)}.$$

Здесь α_{ix} – производная от α_i по x , F_y – производная от F по y , F_{1y} – производная от F_1 по y . Оптимизация аэродинамической производной C_m^h будем выполняться по параметрам $\bar{\alpha}_{ix}$, $\bar{\lambda}(y)$ и $\bar{H}(y)$.

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\Psi = \max_{\bar{W}_1} \{ \Phi_1 + \rho \Phi_2 \};$$

$$\bar{W}_1 = \{ \bar{\alpha}_i(x), \bar{\lambda}(y), \bar{H}(y) \};$$

$$\bar{\alpha}_i(0) = 1, \bar{\alpha}_{ix}(0) = 0, \bar{\alpha}_i(2) = 0;$$

$$\bar{\lambda}(1) = k\lambda(0), \bar{H}(0) = 1, \bar{H}(1) = \bar{H}/\bar{H}_0;$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\bar{\lambda}(y)} = 1; \int_0^1 \bar{H}(y) dy = \beta.$$

Здесь λ – удлинение крыла, $\lambda(x, y)$ – местное удлинение крыла, α_i – индуктивный угол скоса потока, $\alpha_i(x, y)$ – местный индуктивный угол, α – угол атаки несущей поверхности, $\alpha(x, y)$ – местный угол атаки несущей поверхности, \bar{H} – относительное по размаху отстояние несущей поверхности от границы раздела сред, $\bar{H}(y)$ – форма задней кромки крыла, $\Phi_1 = C_y^h$, $\Phi_2 = C_m^h$, ρ – произвольная константа.

Специальный выбор параметра $\bar{\alpha}_i(x)$ делает экстремальную задачу (6) эквивалентной задаче экстремизации вклада нелинейного слагаемого

в функционал (7). Как указывалось выше, задача является некорректной. Дополнительным (третьим) граничным условием в ней служит постулат Жуковского - Чаплыгина.

Входящие в эту постановку граничные значения для параметра $\bar{\alpha}_i(x)$ вытекают из условий, которые наложены на погонную циркуляцию $\Gamma_0(x, y)$: отличная от нуля нагрузка на крыле, постулат Жуковского - Чаплыгина, а также условие безударного входа соответственно. Изопериметрические условия для параметров $\bar{\lambda}(y)$ и $\bar{H}(y)$ следуют из ограничения на величину подкупольного объема $V(\Omega_-) = \text{const}$.

Как было указано выше, геометрические характеристики несущей поверхности слагаются из характеристик крыла в плане, характеристик профиля и характеристик задней кромки. Поэтому задачу определения оптимальной геометрии крыла целесообразно разбить на частные:

- 1) нахождение оптимального распределения индуктивных углов скоса потока по хорде;
- 2) нахождение оптимальной формы крыла в плане;
- 3) нахождение оптимальной формы задней кромки крыла (вид спереди).

Рассмотрим задачу оптимизации распределения углов скоса потока по хорде для несущей поверхности крыла с максимальным значением коэффициента аэродинамической производной подъемной силы C_y по отстоянию h при фиксированном значении коэффициента аэродинамической производной момента тангажа C_m по отстоянию h . В формализованном виде постановка задачи оптимизации такова:

$$\Psi_1 = \min_{u \in U} \int_0^1 \left(\dot{u}^2(t)(1 + 2\rho t) + u^2(t)(\bar{\rho} - 2\rho t \bar{\rho}) \right) dt; \quad (7)$$

$$u(0) = 1, \dot{u}(0) = 1, u(1) = 0.$$

Здесь $u = \bar{\alpha}_i(t)$, $\dot{u}(t)$ – производная $u(t)$ по t ,

$$\bar{\rho} = \frac{4 \int_0^1 \left(\frac{F_y^2(y)}{\bar{\lambda}(y)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_1 \bar{H}_1^2} \right) dy}{\int_0^1 F^2(y) \bar{\lambda}(y) dy};$$

$$\bar{\rho} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{F_y(y) F_{1y}(y)}{\bar{\lambda}^2(y)} - \frac{1}{\bar{\lambda}(y) \bar{\lambda}_1 \bar{H}_1^3} \right) dy}{\int_0^1 F(y) F_{1y}(y) dy};$$



ρ – произвольная константа, вместо x использована формальная переменная $t = x/2_n$, точка обозначает производную по ней.

Для нахождения минимума функционала будет применен численный метод.

Общая схема численного решения заключается в сведении задачи

$$\Phi[\bar{y}(x)] = \inf \Omega[y(x)]; y(x), \bar{y}(x) \in Y$$

к поиску минимума функции многих переменных [5].

В нашем случае мы имеем задачу оптимизации с неоднородными краевыми условиями.

Для численного решения полученной задачи будем использовать метод Ритца (метод Релея - Ритца).

Численный метод Ритца заключается в сведении исходной задачи минимизации к последовательности конечномерных оптимизационных задач, решения которых сходятся к решению исходной задачи. Для этого необходимо построить минимизирующую последовательность.

Для примера рассмотрим задачу определения минимума функционала $V[y]$ в классе функций M . Будем предполагать, что конечный инфимум μ значений функционала существует, а также, что в классе допустимых функций существуют такие функции, на которых значения исходного функционала конечны. Следовательно, должна существовать такая минимизирующая последовательность функций $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n] = \mu.$$

Если у этой последовательности функций

$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ существует предел y^* , то она и будет являться решением исходной задачи, так как в этом случае будет закончен предельный переход

$$V[y^*] = \lim_{n \rightarrow \infty} V[y_n]$$

Для построения минимизирующей последовательности необходимо выбрать некоторую систему функций (базис) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$. Базисные функции должны удовлетворять двум обязательным условиям:

– базисные функции должны принадлежать классу M ;

– любая конечная линейная комбинация этих функций вида $y_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$ также должна принадлежать классу M .

Для решения задачи минимизации функционала вида

$$V[z] = \int_0^1 [p(t)\dot{y}^2(t) + k(t)\dot{y}(t) + q(t)y^2(t) + f(t)y(t)] dt$$

на множестве функций

$$M = \{y(t) | y(t) \in C^2_{[0,1]}, y(0) = y(1) = 0\}$$

необходимо зафиксировать некоторую конечную систему та-

ких линейно-независимых функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, чтобы

они удовлетворяли однородным краевым условиям $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0, i = \overline{1, n}$. В результате вместо

исходной задачи предстоит решить более узкую задачу минимизации функционала на множестве

линейных комбинаций $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)$.

Решение поставленной задачи

Выполним переход к задаче минимизации функционала на множестве линейных комбинаций. Для этого в исходный функционал необходимо подставить функцию $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} V[\varphi(t)] &= V\left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)\right] = \\ &= \int_0^1 \left\{ p(t) \left[\sum_{i=1}^n c_i \dot{\varphi}_i(t)\right]^2 + k(t) \left[\sum_{i=1}^n c_i \dot{\varphi}_i(t)\right] + \right. \\ &\quad \left. + q(t) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)\right]^2 + f(t) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)\right] \right\} dt \end{aligned}$$

Условие, необходимое для существования

экстремума, имеет вид $\frac{\partial V}{\partial c_j} = 0$.

После выполнения операции дифференцирования функционала V по параметру c_j получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial c_j} &= \int_0^1 \left\{ 2p(t) \sum_{i=1}^n c_i \dot{\varphi}_i(t) \dot{\varphi}_j(t) + k(t) \dot{\varphi}_j(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2q(t) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \varphi_j(t) + f(t) \varphi_j(t) \right\} dt = 0. \end{aligned}$$

После преобразования необходимое условие экстремума примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 (2p(t) \dot{\varphi}_i(t) \dot{\varphi}_j(t) + 2q(t) \varphi_i(t) \varphi_j(t)) dt \right] c_i + \\ + \int_0^1 f(t) \varphi_j(t) dt + \int_0^1 k(t) \dot{\varphi}_j(t) dt. \end{aligned}$$

Запишем систему в матричной форме:

$$A \cdot c = b.$$

Здесь

$$a_{ij} = \int_0^1 (2p(t)\dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_j(t) + 2q(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t))dt,$$

$$b_j = -\int_0^1 (f(t)\varphi_j(t) + k(t)\dot{\varphi}_j(t))dt.$$

Перечислим этапы, необходимые для определения оптимальной геометрической формы несущего крыла методом Ритца:

- приведение исходной задачи к эквивалентной ей задаче с однородными краевыми условиями;
- выбор базисных функций; это может быть кусочно-линейный или кубический интерполяционный базис;
- построение экстремизирующей последовательности;
- восстановление геометрической формы несущей поверхности.

Результаты применения метода Ритца

Будем использовать кусочно-линейный базис. Для построения системы кусочно-линейных функций разобьем отрезок $[0,1]$ на n отрезков $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$ длиной $h_i = t_{i+1} - t_i$, $i = \overline{1, n}$. Базисные функции:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t \leq t_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}(t - t_{i-1}), & \text{если } t_{i-1} < t \leq t_i, \\ \frac{1}{h_i}(t_{i+1} - t), & \text{если } t_i < t \leq t_{i+1}, \\ 0, & \text{если } t_{i+1} < t \leq 1. \end{cases}$$

Будем считать $h_i = h = 0,1$, $t_i = 0,1i$, $i = \overline{0,9}$. Известно, что i -я функция отлична от нуля только на промежутке $[t_{i-1}, t_{i+1}]$. Поэтому справедливы равенства

$$\varphi_i(t)\varphi_j(t) = 0 \text{ и}$$

$$\dot{\varphi}_i(t)\dot{\varphi}_j(t) = 0, i, j = \overline{1, n}, j \neq i-1, j \neq i, j \neq i+1.$$

Следовательно, матрица системы уравнений с неизвестной величиной c_i при таком выборе базисных функций будет трехдиагональной. Ненулевые значения будут иметь элементы:

$$a_{ii} = I_{4,i} + I_{4,i+1} + I_{2,i} + I_{3,i}, i = \overline{2, n},$$

$$a_{i,i+1} = -I_{4,i+1} + I_{1,i}, i = \overline{1, n-1},$$

$$a_{i,i-1} = -I_{4,i} + I_{1,i-1}, i = \overline{2, n},$$

$$b_i = I_{5,i} + I_{6,i} + I_{7,i} + I_{8,i}, i = \overline{1, n},$$

где I – интегралы вида

$$I_{1,i} = \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t)(t - t_i)q(t)dt.$$

Расчет этих восьми интегралов необходим для построения трехдиагональной матрицы системы уравнений. Следующим шагом будет вычисление значений пробной функции посредством решения построенной системы линейных уравнений и восстановление оптимальной геометрии крыла.

С целью верификации вышеописанный численный алгоритм был использован для решения задачи определения геометрии крыла с максимальной подъемной силой [7], аналитическое решение которой получено в [4]. Результаты качественно совпали.

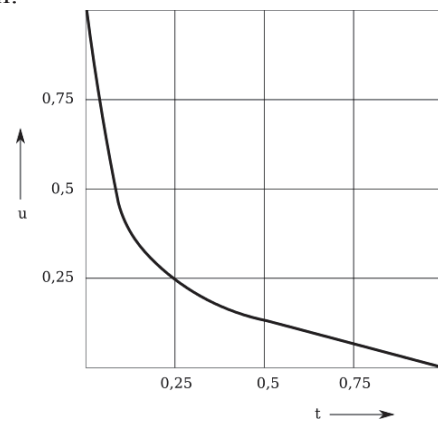


Рис. 2. Экстремальная функция

Формы нижней поверхности крыла, максимизирующего коэффициент аэродинамической производной подъемной силы по отстоянию при фиксированном значении коэффициента аэродинамической производной момента тангажа по отстоянию при коэффициенте $\rho = 2$ и $\rho = 8$ в сечениях $y = 0$, $y = 0,5$ и $y = 1$, полученные описанным методом, показаны на рис. 3. Полученная форма поверхности качественно повторяет форму поверхности крыла с максимальным градиентом подъемной силы по отстоянию, найденную ранее в работе [4].

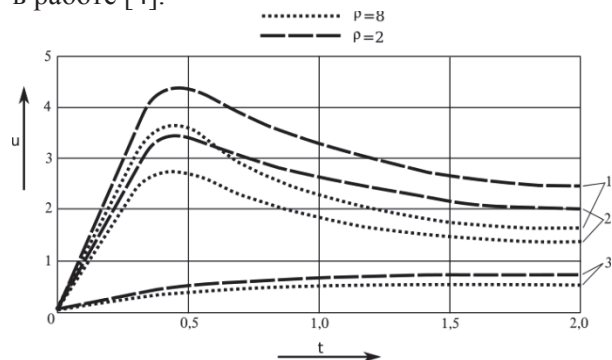


Рис. 3. Форма нижней поверхности крыла в сечении $y = 0$ (график 1), $y = 0,5$ (график 2), $y = 1$ (график 3)

**Заключение**

Решение, найденное в данной задаче, качественно повторяет решения задач о крыле с максимальной подъемной силой и крыле с максимальным градиентом подъемной силы по отстоянию. Иными словами, все три задачи дают примерно одинаковое распределение углов атаки

по размаху и хорде крыла. Это позволяет надеяться, что соответствующая профилировка повышает не только несущие свойства крыла, но и способность соответствующего ЛА самостабилизироваться при движении на сверхмалых отстояниях от твердой границы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панченков А.Н., Драчев П.Т., Любимов В.И. Экспертиза экранопланов. Нижний Новгород : Поволжье, 2006. 656 с.
2. Иродов Р.Д. Критерии продольной устойчивости экраноплана // Ученые записки ЦАГИ, 1970. Т. 1. № 4. С. 63–72.
3. Белецкая С.Б. Оптимизация конструктивных параметров несущих гидродинамических комплексов скоростных судов : дис. ... канд. техн. наук. Нижний Новгород, 1999. 188 с.
4. Аршинский Л.В. Оптимизация геометрии крыла вблизи опорной поверхности : дис. ... канд. физ.-мат. наук : Иркутск, 1990. 190 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
6. Панченков А.Н. Теория оптимальной несущей поверхности. Новосибирск : Наука, 1983. 256 с.
7. Skorobogatova M.V. Применение метода Релея-Ритца для определения формы несущей поверхности крыла Мунка с максимальным коэффициентом подъемной силы // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 3 (51). С. 203–207.

REFERENCES

1. Panchenkov A.N., Drachev P.T., Lyubimov V.I. Ekspertiza ekranoplanov [Examination of ground effect vehicles]. Nizhnii Novgorod: Povolzh'e Publ., 2006, 656 p.
2. Irodov R.D. Kriterii prodol'noi ustoichivosti ekranoplana [Criteria of the longitudinal stability of the ground effect vehicles]. *Uchenye zapiski TsAGI [Scholarly notes of Central Aerohydrodynamic Institute]*, 1970, Vol. 1, No. 4, pp. 63–72.
3. Beletskaya S.B. Optimizatsiya konstruktivnykh parametrov nesushchikh gidrodinamicheskikh kompleksov skorostnykh sudov : dis. ... kand. tekhn. nauk [Optimization of constructive parameters of load-bearing hydrodynamic complexes of high-speed vessels. Ph.D. (Engineering) thesis]. Nizhnii Novgorod, 1999, 188 p.
4. Arshinskii L.V. Optimizatsiya geometrii kryla vblizi opornoj poverkhnosti : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Optimization of the wing geometry near the supporting surface. Ph.D. (Physics and Mathematics) thesis]. Irkutsk, 1990, 190 p.
5. Kalitkin N.N. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 512 p.
6. Panchenkov A.N. Teoriya optimal'noi nesushchej poverkhnosti [Theory of the optimal bearing surface]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1983, 256 p.
7. Skorobogatova M.V. Primenenie metoda Releya-Ritza dlya opredeleniya formy nesushchej poverkhnosti kryla Munka s maksimal'nym koeffitsientom pod'emnoi sily [Application of the Rayleigh-Ritz method for determining the shape of the bearing surface of the Munk wing with the maximum lift coefficient]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemyi analiz. Modelirovanie [Modern technologies. System analysis. Modeling]*, 2016, No. 3 (51), pp. 203–207.

УДК 629.4.015

DOI: 10.26731/1813-9108.2017.3(55).174-179

Каргапольцев Сергей Константинович,
д. т. н., профессор, первый проректор,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
e-mail: kck@irgups.ru

Новосельцев Петр Викторович,
к. т. н., доцент, Улан-Удэнский институт
железнодорожного транспорта,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
e-mail: nov-pv@mail.ru

Купцов Юрий Алексеевич,
аспирант,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
e-mail: uuf.vpo@mail.ru

S. K. Kargapol'tsev,
Doctor of Engineering Science, Prof., First vice-rector, Irkutsk
State Transport University,
e-mail: kck@irgups.ru

P. V. Novoseltsev,
Ph.D. in Engineering Science, Assoc. Prof., Ulan-Ude Institute of
Railway Transport,
Irkutsk State Transport University,
e-mail: nov-pv@mail.ru

Y. A. Kuptsov
Ph.D. student, Irkutsk State Transport University,
e-mail: uuf.vpo@mail.ru

Информация о статье

Дата поступления: 12 августа 2017 г.

Article info

Received: August 12, 2017

ВЛИЯНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ РЕЛЬСОВОГО ПУТИ НА ДИНАМИКУ ТЯГОВОГО ПРИВОДА ЛОКОМОТИВА**INFLUENCE OF THE LONGITUDINAL STIFFNESS OF THE TRACK ON THE DYNAMICS OF THE LOCOMOTIVE TRACTION DRIVE**