



М. А. Гаер, Е. Ю. Кузьмина

Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Дата поступления: 25 апреля 2019 г.

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ И СБОРОК

Аннотация. В современных условиях компьютеризированного производства возникает целый комплекс проблем, связанных с пространственными допустимыми отклонениями форм поверхностей деталей и сборок. Одной из таких проблем является обобщенное математическое представление сборок с учетом допусков. Несмотря на значительные успехи, достигнутые в процессе совершенствования САД систем за последнее время, методы моделирования и представления структуры сборок остаются недостаточно разработанными. Большинство популярных моделей сборок учитывают лишь номинальные размеры и, как следствие, задание и поддержка величин допусков, а также осуществление полноценного размерного анализа существенно затруднительны. Не в последнюю очередь это обусловлено тем, что первоначально при моделировании в основном использовалась аналитическая геометрия. Со временем этого аппарата стало недостаточно. И сейчас, при автоматизированном проектировании сборок с учётом допусков, все шире используются подходы, связанные с применением дифференциальной геометрии и топологии. Данная статья посвящена описанию геометрического моделирования пространственных отклонений деталей и сборок. Описывается модель для представления конфигурационных пространств допусков искажения метрики форм поверхностей деталей и сборок с применением дифференциальной геометрии и топологии. Такой подход позволяет достаточно успешно описывать малые отклонения от номинальной формы поверхности по величине кривизны и длины соответствующих линий. При этом допуски могут быть охарактеризованы изменением коэффициентов первой квадратичной формы при неизменности второй. Для указанных коэффициентов строятся конфигурационные пространства, дающие возможность в контексте системы автоматизированного размерного анализа представлять в виде параметрической модели указанные виды допусков.

Ключевые слова: проектирование, допуски, математическая модель, поверхность свободной формы, квадратичные формы, пространственные отклонения.

М. А. Gaer, E. Yu. Kuzmina

Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, the Russian Federation

Received: April 25, 2019

CONFIGURATION VARIETIES OF SQUARE FORMS OF SURFACES DETAILS AND ASSEMBLIES

Abstract. In modern conditions of computerized production, a whole complex of problems arises associated with the spatial permissible deviations of the shapes of the surfaces of parts and assemblies. One of these problems is the generalized mathematical representation of assemblies with allowances. Despite the significant successes achieved in the process of the improvement of CAD systems in recent years, the methods of modeling and representing the structure of assemblies remain insufficiently developed. Most popular models of assemblies take into account only the nominal dimensions and, as a result, the task and support of tolerance values, as well as the implementation of a full-sized dimensional analysis are essentially difficult. Last but not least, this is due to the fact that initially, the modeling was mainly used analytical geometry. Over time, this device was not enough. And now, with automated design of assemblies, taking into account tolerances, the approaches associated with the use of differential geometry and topology are increasingly used. This article is devoted to the description of geometric modeling of spatial deviations of parts and assemblies. A model is described for representing the configuration spaces of tolerances for the distortion of the metrics of the shapes of the surfaces of parts and assemblies using differential geometry and topology. Such an approach allows one to sufficiently successfully describe small deviations from the nominal surface shape by the magnitude of the curvature and the length of the corresponding lines. In this case, the tolerances can be characterized by a change in the coefficients of the first quadratic form with the invariability of the second. For these coefficients, configuration spaces are constructed, which make it possible in the context of an automated dimensional analysis system to represent the specified types of tolerances as a parametric model.

Keywords: design, tolerances, mathematical model, free-form surface, quadratic forms, spatial deviations.

Введение

Геометрическая форма детали механизма чаще всего представляет собой композицию плос-

ких, цилиндрических, конических, сферических и других поверхностей. Реальная форма, получаемая при изготовлении детали, обычно отличается от



номинальной геометрической формы (заданной конструктором). При этом потери в точности соблюдения геометрических параметров сборки обусловлены допусками не только в размерах деталей, но и в форме и взаимном сопряжении их поверхностей.

Отклонения формы и взаимного расположения поверхностей изделия формируются в процессе их практической обработки. Отклонения обуславливаются нарушениями точности в результате куммулятивных эффектов эксплуатационных деформаций станка, износом инструмента, деформациями непосредственно изделия, неравномерностями припусков на обработку и т. д. Результаты этих отклонений влекут за собой снижение технологических и эксплуатационных характеристик механизмов, влияют на трудоемкость и точность сборки и увеличивают объем операций пригонки, понижает точность при изготовлении и контроле. В качестве примера можно упомянуть подшипники качения, поскольку они весьма чувствительны к возможным отклонениям формы и взаимного расположения посадочных поверхностей. При этом, даже малые отклонения в подвижных соединениях приводят к значительному уменьшению износостойкости деталей из-за повышения удельного давления на выступах поверхностей.

Анализ современных стандартов показывает, что основное внимание разработчиками систем автоматизированного проектирования (САПР) уделяется форме поверхностей деталей, участвующих в плоских сопряжениях и системах вал – отверстие. При моделировании используются достаточно важные частные случаи: выпуклость/вогнутость, бочкообразность и пр. В то же время геометрические допуски, применяемые для поверхностей свободной формы (СФ), представлены, как правило, в относительно общем виде лишь эквидистантным допуском на профиль. С одной стороны, детали с поверхностями СФ часто применяются в различных узлах и конструкциях, что, безусловно, оказывает непосредственное влияние на их качество и безопасность. С другой стороны, требования стандартов к точности изделий повсеместно ужесточаются.

Для современного машиностроения несомненный интерес представляет моделирование в САПР трехмерных отклонений поверхностей, с возможностью учета допусков. Реализация подобной возможности предполагает как разработку математического аппарата, так и создание специализированных САПР, позволяющих проводить описание и расчет поверхностей СФ при возмож-

ных допусках отклонений различного типа и вида, размеров и форм.

В данной статье осуществляется моделирование отклонений поверхностей деталей и сборок СФ с точки зрения дифференциально-геометрического подхода, предложенного в [1]. При этом предполагается вычисление точек поверхности СФ по известным коэффициентам её первой и второй квадратичных форм. В работе [2] дается геометрическая интерпретация коэффициентов квадратичных форм и предложено трехмерные отклонения характеризовать длиной и кривизной линий на этой поверхности СФ. Последнее позволяет учитывать реальные отклонения от номинальной формы поверхности СФ.

Конфигурационное пространство

Понятие конфигурационного пространства широко используется в математической физике, вариационном исчислении, аналитической механике, теории шарнирных механизмов и т. д. Указанные области знаний имеют каждая свое адаптированное задание конфигурационного пространства. Вместе с тем можно выделить их характерные общие черты, которые помогут определить подобное пространство для представления малых отклонений от номинальной формы поверхности [3].

Введем понятие конфигурационного пространства (КП), под которым понимаем абстрактное пространство, представляющее собой кортеж m переменных, задающих расположение в пространстве некоторой, в общем случае частично упорядоченной [11–13, 15, 16], механической системы и её частей как относительно друг друга, так и относительно заданной системы отсчёта. Эту совокупность m переменных можно интерпретировать как m декартовых координат в m -мерном пространстве, называемых *обобщенными координатами* (ОК). Для заданного временного среза эти ОК определяют *конфигурацию системы* (КС) – положение системы и её частей.

Размерность КП равна числу m степеней свободы системы, вводимой для условного представления движения КС как перемещения некоторой точки, полностью определяющей состояние системы в конкретный временной срез [14]. Параметризованная кривая в КП является траекторией движения системы и полностью характеризует её эволюцию. При этом КП n частиц может быть представлено прямым произведением КП, отвечающих каждой частице [4–6].

В нашем случае мы и воспользуемся тем, что при построении КП его можно разложить в прямое произведение составляющих частей – от-



дельных КП поверхностей деталей с фиксированными допусками, соответственно.

Пространство параметров поверхности, характеризующих её отклонение от номинальных формы и размеров при заданных значениях допусков, называем конфигурационным многообразием (КМ) поверхности.

С точки зрения дифференциальной геометрии допуски формы удобно классифицировать следующим образом [7]:

1. Допуски, обусловленные *изгибом*. Их можно связать с вариацией коэффициентов второй квадратичной формы поверхности СФ при условии, что коэффициенты первой остаются неизменными.

2. Допуски при *искажении метрики*. Их можно связать с вариацией коэффициентов первой квадратичной формы поверхности СФ при условии, что коэффициенты второй остаются неизменными.

Это обстоятельство дает возможность моделировать КМ первой и второй квадратичных форм по отдельности, а их прямое произведение равно КМ поверхности.

Векторное представление коэффициентов квадратичных форм поверхности

Введем в рассмотрение S – произвольно параметризованную поверхность (ППП), заданную регулярной векторзначной функцией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, частные производные которой:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{r}_v$$

не коллинеарны. В данной точке плоскость, задаваемая векторами $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$, касательная к ППП, а вектор $\vec{n} = \frac{|\vec{r}_u \vec{r}_v|}{\|\vec{r}_u, \vec{r}_v\|}$ – единичный вектор нормали.

Первой квадратичной формой (КФ) поверхности называют [8, 9] квадрат дифференциала функции $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$:

$$\mathbf{I} = d\vec{r}^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2 \cdot \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle dudv + \vec{r}_v^2 dv^2$$

или

$$\mathbf{I} = d\vec{r}^2 = \mathbf{E}du^2 + 2\mathbf{F}dudv + \mathbf{G}dv^2,$$

функции $\mathbf{E} = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle$, $\mathbf{F} = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle$ и $\mathbf{G} = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle$ называются *коэффициентами* КФ поверхности.

Вторая квадратичная форма (КФII) поверхности определяется соотношением:

$$\begin{aligned} \mathbf{II} &= \langle -d\vec{r}, d\vec{n} \rangle \\ &= \langle \vec{r}_{uu}, \vec{n} \rangle du^2 + 2 \langle \vec{r}_{uv}, \vec{n} \rangle dudv \\ &+ \langle \vec{r}_{vv}, \vec{n} \rangle dv^2. \end{aligned}$$

Обозначив $\mathbf{L} = \langle \vec{r}_{uu}, \vec{n} \rangle$, $\mathbf{M} = \langle \vec{r}_{uv}, \vec{n} \rangle$, $\mathbf{N} = \langle \vec{r}_{vv}, \vec{n} \rangle$, получим КФII поверхности в виде:

$\mathbf{II} = \mathbf{L}du^2 + 2\mathbf{M}dudv + \mathbf{N}dv^2$, функции \mathbf{L} , \mathbf{M} и \mathbf{N} называют *коэффициентами КФII* поверхности.

Придадим геометрическую интерпретацию с точки зрения векторных евклидовых пространств коэффициентам \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} – КФ и \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{N} – КФII, соответственно.

Пусть φ – угол между \vec{r}_u и \vec{r}_v , соответственно, ψ_1, ψ_2, ψ_3 – углы между вектором нормали \vec{n} к ППП в данной точке и $\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$. Тогда коэффициенты КФ и КФII ППП представимы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle = |\vec{r}_u|^2; \\ \mathbf{F} &= \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle = |\vec{r}_u| \cdot |\vec{r}_v| \cos \varphi = |\vec{r}_u| \cdot \text{Pr } \vec{r}_v |_{\vec{r}_u}^\perp = \\ &|\vec{r}_v| \cdot \text{Pr } \vec{r}_u |_{\vec{r}_v}^\perp; \quad (1) \\ \mathbf{G} &= \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle = |\vec{r}_v|^2; \\ \mathbf{L} &= \langle \vec{r}_{uu}, \vec{n} \rangle = |\vec{r}_{uu}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \psi_1 = |\vec{r}_{uu}| \cdot \cos \psi_1 = \\ &\text{Pr } \vec{r}_{uu} |_{\vec{n}}^\perp; \\ \mathbf{M} &= \langle \vec{r}_{uv}, \vec{n} \rangle = |\vec{r}_{uv}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \psi_2 = |\vec{r}_{uv}| \cdot \cos \psi_2 = \\ &\text{Pr } \vec{r}_{uv} |_{\vec{n}}^\perp; \quad (2) \\ \mathbf{N} &= \langle \vec{r}_{vv}, \vec{n} \rangle = |\vec{r}_{vv}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \psi_3 = |\vec{r}_{vv}| \cdot \cos \psi_3 = \\ &\text{Pr } \vec{r}_{vv} |_{\vec{n}}^\perp. \end{aligned}$$

Здесь (см. рис. 1) коэффициенты \mathbf{E} и \mathbf{G} – квадраты длин векторов \vec{r}_u и \vec{r}_v , \mathbf{F} – их скалярное произведение, \mathbf{L} , \mathbf{M} , \mathbf{N} – ортогональные проекции $\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$ на ось с направляющей \vec{n} , соответственно.

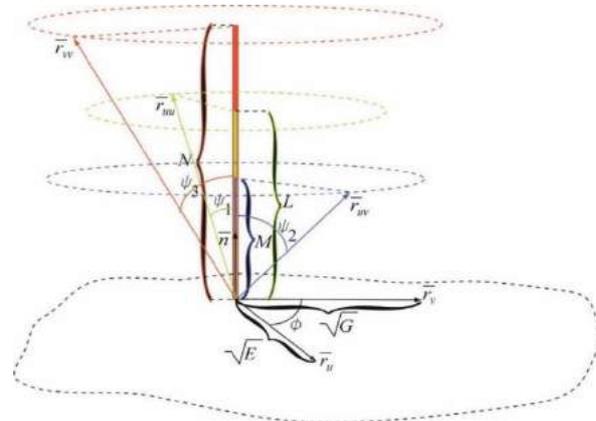


Рис. 1. Геометрическая интерпретация коэффициентов

Геометрическая интерпретация вариаций коэффициентов квадратичных форм поверхности

Определим, как влияет изменение коэффициентов КФ на форму ППП.

Пусть, по-прежнему, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – вектор-функция, описывающая ППП S . На S задана сеть, состоящая из двух семейств *координатных линий* (КЛ) $u = u(t, \alpha)$, $v = v(t, \alpha)$ (см. рис. 2).

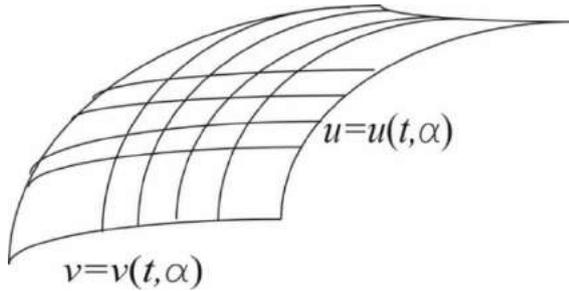


Рис. 2. Семейство координатных линий

Длина дуги кривой на ППП S задается посредством коэффициентов КФ по формуле [8]:

$$s = \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Фиксируем $v = const$, тогда $dv = 0$. В этом случае длина дуги КЛ $u = u(t, \alpha)$ равна:

$$s = \int_{u_0}^{u_{max}} \sqrt{Edu^2} = \int_{u_0}^{u_{max}} \sqrt{E} du.$$

Следовательно, изменение $E = E(u, v)$ влечет за собой изменение длины КЛ $u = u(t, \alpha)$, а изменение функции $G = G(u, v)$ – длины КЛ $v = v(t, \alpha)$.

Величина угла между двумя КЛ определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{G \cdot E}}$$

т. о., при постоянных G и E , изменение F влечет за собой изменение угла между КЛ:

При изменении коэффициентов E , F и G так, что коэффициенты L , M и N остаются неизменными, на ППП будут меняться длины соответствующих КЛ и/или угол между ними. Этот процесс называют **искажением метрики**.

Пусть теперь изменяются только коэффициенты КФ ППП S . Это означает, что ППП подвергается изгибанию при условии сохранения тех значений u и v каждой точки, которые отвечали ей до изгибания.

Следовательно, коэффициенты E , G , F остаются теми же функциями u , v , как и до изгибания [10], и, значит, они и их производные прежние значения в каждой точке сохраняют.

Заметим, что при изгибании ППП меняет свою форму вблизи каждой точки, а главные кривизны – свои значения. Тем не менее, полная кривизна K (как их произведение) остается постоянной, поскольку она может быть найдена и по следующей формуле:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

но в силу уравнения Гаусса выражение $LN - M^2$ полностью определяется коэффициентами КФ и их первыми и вторыми производными по u , v .

Рассмотрим теперь кривизны КЛ на ППП.

Поскольку ППП задана вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, то КЛ $v = const$ на ней задается уравнением

$$\bar{R}(u) = \bar{r}(u, c).$$

В каждой точке кривизна этой КЛ определяется соотношением:

$$k = \frac{\|\bar{R}''(u), \bar{R}'(u)\|}{|\bar{R}'(u)|^3} = \frac{\|\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u\|}{|\bar{r}_u|^3} = \frac{|\bar{r}_{uu}| \cdot |\bar{r}_u| \cdot \sin(\widehat{\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u})}{|\bar{r}_u|^3} = \frac{|\bar{r}_{uu}| \cdot \sin(\widehat{\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u})}{|\bar{r}_u|^2}.$$

Согласно последнему равенству, изменение кривизны КЛ $v = const$ возможно за счет изменения \bar{r}_{uu} , поскольку $|\bar{r}_u|^2 = E$, а коэффициенты КФ не меняются. В свою очередь, изменение \bar{r}_{uu} обуславливает изменение коэффициента $L = \langle \bar{r}_{uu}, \bar{n} \rangle$ КФП поверхности.

Аналогичные рассуждения показывают, что изменение кривизны КЛ $u = const$ ведет к изменению $N = \langle \bar{r}_{vv}, \bar{n} \rangle$ КФП ППП.

Верно и обратное.

Вариации коэффициентов L и N КФП ППП влияют на кривизну соответствующих КЛ.

Как показано выше, выражение $LN - M^2$ должно оставаться постоянным. Следовательно, при изменении L и/или N значение M должно выбираться согласно этому условию.

Моделирование конфигурационных многообразий при искажении метрики

Рассмотрим пространство параметров, описывающих конфигурации системы (КС) шести функций $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, $L(u, v)$, $M(u, v)$, $N(u, v)$ – коэффициентов КФ данной ППП (см. рис. 1).

Если при взаимном переходе меняется хотя бы одна из функций в парах $E(u, v)$, $F(u, v)$ или $G(u, v)$, а $L(u, v)$, $M(u, v)$ и $N(u, v)$ остаются неизменными, то две КС считаем различными.

Начнем с КС, в которых меняется только E . Пусть, при переходе от одной такой КС к другой, E^C в «старой» системе меняется на E^H в «новой». При этом оставляем без изменения остальные коэффициенты КФ и КФП ППП. В этом случае КП назовем *КП вариаций* коэффициента E , или просто *КП коэффициента E* .

Сформулированные условия позволяют построить цепочку рассуждений, накладывающих требования на вектор-функции производных $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.



По формулам (1), $E = |\bar{r}_u|^2$, следовательно, $E(u, v)$ изменится при изменении длины \bar{r}_u . При этом \bar{r}_v оставляем неизменным в силу того, что значение $G = |\bar{r}_v|^2$ должно остаться прежним. Значит, не изменятся \bar{r}_{vv} и $\bar{r}_{uv} = \bar{r}_{vu}$. Тогда вектор-функция $\bar{r}(u, v)$ может быть изменена на вектор, зависящий только от параметра u , т.е. $\bar{r}_u^H = \bar{r}_u^C + \bar{\rho}(u)$.

Аналогично, $\bar{r}_{uu}^H = \bar{r}_{uu}^C + \bar{\rho}'(u)$, и, учетом неизменности L , из формул (2) получаем $\text{Pr } \bar{r}_{uu}^H |_{\bar{n}}^\perp = \text{Pr } \bar{r}_{uu}^C |_{\bar{n}}^\perp$. Следовательно, $\bar{\rho}'(u) \perp \bar{n}$, т.е. $\bar{\rho}'(u)$ коллинеарен плоскости $\{\bar{r}_v, \bar{r}_v\}$:

$$\bar{\rho}'(u) \in \{\bar{r}_v, \bar{r}_v\}. \quad (3)$$

Полагаем, не умаляя общности, что $\bar{\rho}(u)$ лежит в плоскости $\{\bar{r}_v, \bar{r}_v\}$, поскольку если хотя бы один из $\bar{r}_{uu}, \bar{r}_{vv}$ не нулевой, то сохранение M и N (т.е. проекций не изменившихся $\bar{r}_{uu}, \bar{r}_{vv}$ на некоторую общую ось \bar{n}^H) возможно лишь в случае не изменения \bar{n} . При всех прочих условиях сохранение M и N возможно лишь при повороте \bar{n} вокруг \bar{r}_v , но тогда КС (см. рис. 1) повернется вокруг \bar{r}_v , а значит, получим ту же самую КС с точностью до ее поворота в пространстве.

Итак, остается ещё одно условие для полученной КС – неизменность $F = |\bar{r}_v| \cdot \text{Pr } \bar{r}_u |_{\bar{r}_v}^\perp$, из которого следует, что $\text{Pr } \bar{r}_u |_{\bar{r}_v}^\perp$ также не должна изменяться.

С точки зрения геометрического смысла, вариация лишь E обуславливает изменение \bar{r}_u , конец которого характеризуется точкой прямой, ортогональной \bar{r}_v и проходящей через конец \bar{r}_u^C (см. рис. 3).

Т. о., имеем $\bar{r}_u^H = \bar{r}_u^C + \bar{\rho}(u)$, где $\bar{\rho}(u) = \overline{NP} = \lambda$, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(u) &= \lambda \left(\bar{r}_u^C - \frac{|\bar{r}_u^C| \cos \varphi}{|\bar{r}_v|} \bar{r}_v \right) \\ &= \lambda \left(\bar{r}_u^C - \frac{|\bar{r}_u^C| \cdot |\bar{r}_v| \cos \varphi}{|\bar{r}_v|^2} \bar{r}_v \right) \\ &= \lambda \left(\bar{r}_u^C - \frac{F}{G} \bar{r}_v \right). \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства не зависит от v , и её производная по v равна нулю. При этом, даже если λ и не является константой, то все равно λ не зависит от v :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial v} = \lambda \left(\bar{r}_{uu}^C - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F}{G} \right) \cdot \bar{r}_v - \frac{F}{G} \bar{r}_{vv} \right) \equiv 0. \quad (4)$$

Алгебраическими преобразованиями (4) с учетом условия (3) принадлежности вектора $\bar{\rho}'$ касательной плоскости, можно получить ряд частных случаев условия Гаусса-Петерсона-Кодацци [6]. Так, скалярно умножив обе части (4) на вектор \bar{n} , получим условие на коэффициенты КФ, когда возможна рассматриваемая вариация:

$$M - \frac{F \cdot N}{G} = 0,$$

или

$$GM - FN = 0. \quad (5)$$

Перейдем к вектору

$$\bar{r}_u^H = (1 + \lambda) \bar{r}_u^C - \lambda \cdot \frac{F}{G} \bar{r}_v$$

и найдем его скалярный квадрат:

$$\begin{aligned} |\bar{r}_u^H|^2 &= (1 + \lambda)^2 |\bar{r}_u^C|^2 - 2\lambda(1 + \lambda) \cdot \frac{F}{G} \cdot \langle \bar{r}_u^C, \bar{r}_v \rangle + \lambda^2 \\ &\quad \cdot \frac{F^2}{G^2} |\bar{r}_v|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E^H = (1 + \lambda)^2 E^C - 2\lambda(1 + \lambda) \cdot \frac{F^2}{G} + \lambda^2 \cdot \frac{F^2}{G};$$

$$E^H = (1 + \lambda)^2 E^C - (2\lambda + \lambda^2) \cdot \frac{F^2}{G}. \quad (6)$$

Перепишем последнюю формулу:

$$E^H = \frac{(EG^C - F^2)(1 + \lambda)^2 + F^2}{G}. \quad (7)$$

Из соотношения (6) следует, что изменения значения λ (возможно функционально зависимо от u), дают различные КС из $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, $L(u, v)$, $M(u, v)$, $N(u, v)$, являющихся коэффициентами КФ данной ППП с условиями (3) и (4) при изменении лишь E . При этом $\lambda = 0$ означает номинальное положение: $E^H = E^C$. Отметим также, что $\lambda \neq -1$,

поскольку при $\lambda = -1$ векторы \bar{r}_u^H и \bar{r}_v становятся, в общем случае, коллинеарными, или, в частном

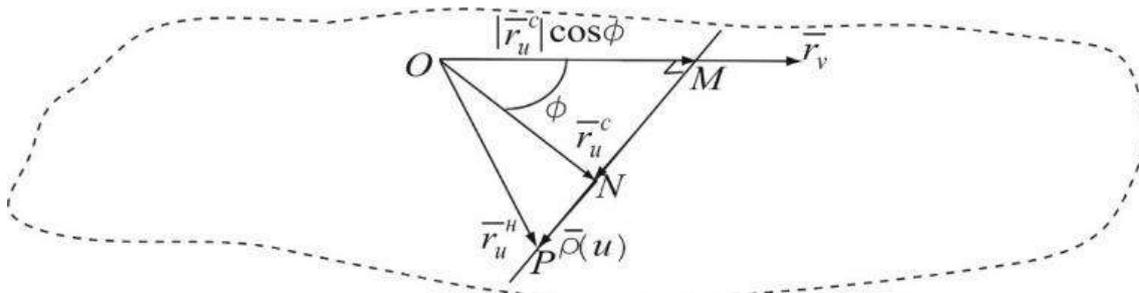


Рис. 3. Геометрический смысл вариации E



случае, может оказаться $\bar{r}_u^H = 0$, что недопустимо по условию рассматриваемых ППП.

Следовательно, КП коэффициента E будет вещественная прямая с выколотой точкой ($\lambda \neq -1$). Поскольку нас интересуют малые вариации E , ограничимся отрезком $\Delta E = [a, b]$.

Аналогичными рассуждениями, с точностью до взаимной замены E на G и \bar{r}_u на \bar{r}_v , проводится построение КП коэффициента G . Изменения коснутся лишь G и \bar{r}_v согласно следующим формулам:

$$G^H = \frac{(EG^C - F^2)(1 + \mu)^2 + F^2}{E} \quad (9)$$

$$\bar{r}_v^H = (1 + \mu)\bar{r}_v^C - \mu \cdot \frac{F}{E} \bar{r}_u \quad (10)$$

По аналогии с предыдущим случаем обозначим КП коэффициента G через $\Delta G = [c, d]$.

Приступим к рассмотрению КП коэффициента F . Поскольку E и G остаются без изменения, то также не меняются $|\bar{r}_u|$ и $|\bar{r}_v|$. Вариацию коэффициента $F = |\bar{r}_u| \cdot |\bar{r}_v| \cdot \cos \varphi$ будем осуществлять за счет изменения угла φ между \bar{r}_u и \bar{r}_v . Будем, для определенности, поворачивать вектор \bar{r}_u относительно вектора \bar{r}_v (рис. 4), не выходя за рамки касательной плоскости $\{\bar{r}_u^C, \bar{r}_v^C\}$. Этим обеспечивается неизменность \bar{n} , и, следовательно, L , M и N КФП.

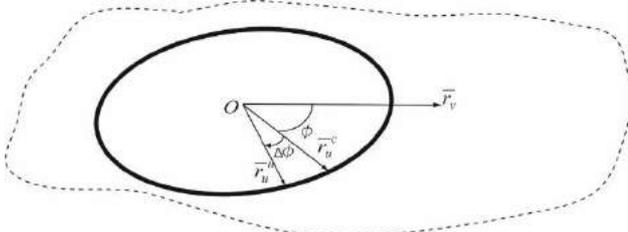


Рис. 4. Относительный поворот вектора \bar{r}_u

Множество состояний рассматриваемой КС $E(u, v), F(u, v), G(u, v), L(u, v), M(u, v), N(u, v)$ при вариации лишь F , задается положением \bar{r}_u , конец которого, в свою очередь, описывает окружность на касательной

плоскости $\{\bar{r}_u^C, \bar{r}_v^C\}$, и каждой точке этой окружности соответствует единственное состояние КС.

Т. о., КП коэффициента F служит окружность S^1 (рис. 4), которую можно интерпретировать как отрезок, концы которого абстрактно склеены друг с другом: $\Delta \varphi \in [0, 2\pi]$. Окружность является одномерным многообразием, аналогичным двумерному тору; каждая точка этого многообразия отождествляется с единственным состоянием рассматриваемой КС.

В общем случае КП КФП есть трехмерное многообразие:

$$\Delta E \times \Delta G \times S^1.$$

Отложим соответствующие значения на трёх взаимно перпендикулярных осях, тогда все состояния рассматриваемой КС можно изобразить в виде точек прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 5 а). В частных случаях, если наложенные допуски на ППП обуславливают изменение только E и F , либо G и F , тогда КМ будут двумерные цилиндры (см. рис. 5, б).

Моделирование конфигурационных многообразий при изгибании поверхности

При рассмотрении допусков изгибания две КС коэффициентов КФ $E(u, v), F(u, v), G(u, v), L(u, v), M(u, v), N(u, v)$ считаем различными, если при переходе от одной из них к другой меняется хотя бы одна из функций $L(u, v)$ или $N(u, v)$, функции $E(u, v), F(u, v)$ и $G(u, v)$ остаются неизменными, а функция M , с учетом геометрического смысла вариаций коэффициентов КФП, меняется так, чтобы полная кривизна ППП оставалась неизменной, т. е. величина $LN - M^2$ оставаясь постоянной.

Итак, как показано выше, вариация L влияет на кривизну координатных линий $v = \text{const}$, а вариация N – на кривизну координатных линий $u = \text{const}$. При этом длина соответствующих координатных линий должна оставаться неизменной, поскольку коэффициенты E и G по условию не меняются.

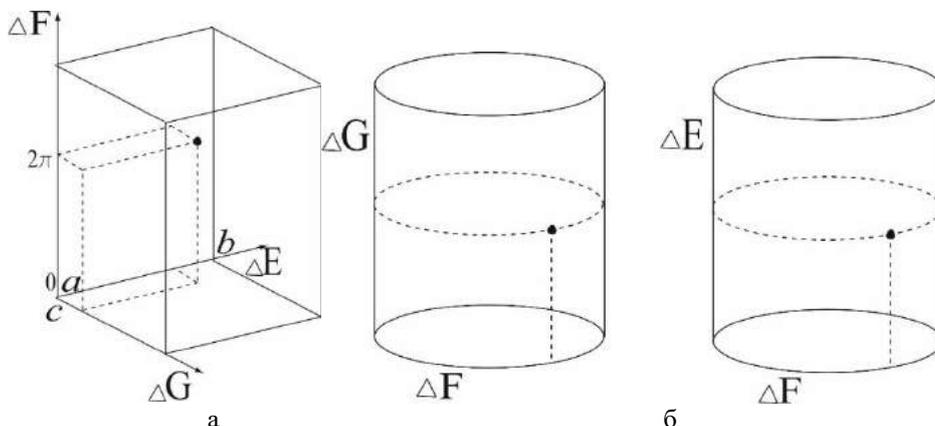


Рис. 5. Состояния рассматриваемой конфигурации системы



Перейдем к рассмотрению линии длины ℓ с нулевой кривизной (отрезку прямой $[0, \ell]$). Тогда вектор-функция натурального параметра s (длины дуги) $\vec{r}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$ при $s \in [0, \ell]$ и различных значениях R будет описывать дугу кривой длины ℓ и радиуса кривизны R . Если кривизна $k = \frac{1}{R}$ дуги стремится к нулю, т. е. радиус кривизны стремится к бесконечности, то сама дуга «выпрямляется» в отрезок. Обратное, если радиус кривизны стремится к нулю, то дуга вырождается в точку. При этом направление искривления, в зависимости от знака R , может быть выпуклым вверх или вниз относительно данного отрезка (см. рис. 6).

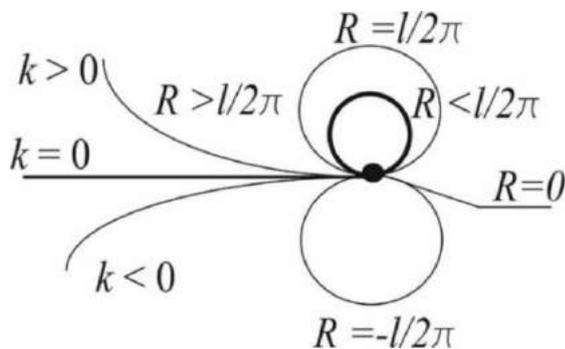


Рис. 6. Направления искривления

Уменьшение радиуса кривизны до значения $R = \frac{\ell}{2\pi}$ приводит к «слиянию» концов отрезка, что является крайним случаем (визуального) сохранения длины дуги, равной ℓ , поскольку при дальнейшем уменьшении радиуса кривизны получают-

ся окружности с соответствующим радиусом, и в этом случае отрезок наматывается на такую окружность необходимое число раз.

Заметим, что изучаются лишь малые изменения формы ППП в пределах допустимых значений, этот крайний случай мы не рассматриваем.

В связи с этим, при переходе от одной КС к другой, будем менять значения L и/или N (вместе со значением M , сохраняя условие $LN - M^2$) по формулам: $L^H = L^C + \xi$ и/или $N^H = N^C + \nu$, где $\xi \in \left(-\frac{2\pi}{\ell_L}, \frac{2\pi}{\ell_L}\right)$, $\nu \in \left(-\frac{2\pi}{\ell_N}, \frac{2\pi}{\ell_N}\right)$, ℓ_L и ℓ_N – длины КЛ $\nu = \text{const}$ и $u = \text{const}$, соответственно. В случае, если длины КЛ являются не постоянными, то соответствующие интервалы можно ограничить наименьшим из них, хотя, как отмечено выше, это не принципиально, поскольку крайние значения являются излишне экзотическими для реальных поверхностей деталей и сборок.

Следовательно, КП коэффициента L , наряду с N , является отрезком. А значит, КМ КФП будет двумерная поверхность $LN - M^2 = C$, заданная на прямом произведении этих отрезков.

Заключение

Несмотря на то, что разработчики включают модуль анализа допусков в структуру САПР, распространенные специализированные САПР не позволяют в полной мере проводить исчерпывающий размерный анализ сборок, одним из параметров которого служит оценка качества ППП. Обсуждаемый метод представления малых отклонений поверхностей СФ может быть распространен и на более сложные технические системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гаер М.А., Шабалин А. В., Плоский П.Л. Описание пространственных допустимых отклонений с помощью коэффициентов квадратичных форм. М.: МГТУ «МАМИ», 2009. С. 138–144.
2. Валов А.А., Гаер М.А., Журавлев Д. А. Представление геометрии поверхностей с помощью квадратичных форм // Вестник ИрГТУ. 2013. № 8. С. 22–28.
3. Гаер М.А., Журавлёв Д. А., Яценко О. В. Конфигурационные пространства поверхностей деталей и сборок. // Вестник ИрГТУ. – 2011. - № 10. С. 32-36.
4. <http://bse.sci-lib.com/> – Большая советская энциклопедия.
5. <http://ru.wikipedia.org/wiki/> – Википедия.
6. <http://femto.com.ua/> – Энциклопедия физики и техники.
7. Журавлёв Д. А., Грушко П. Я., Яценко О. В. О новых дифференциально-геометрических подходах к автоматизированному проектированию сборок с учётом допусков // Вестник ИрГТУ, № 12, 2002. – С. 82-92.
8. Александров А. Д., Нещетаев Н. Ю. Геометрия: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 672 с.: ил.
9. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 16. 2006. – 304 с.
10. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГТТИ, 1950. – 228 с.
11. Kuzmin O.V., Khomenko A.P. and Artyunin A.I. Discrete model of static loads distribution management on lattice structures. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. – 2018. – Vol. 19, Is. 3. – P. 183-193.
12. Kuzmin O.V., Khomenko A.P. and Artyunin A.I. Development of special mathematical software using combinatorial numbers and lattice structure analysis. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. – 2018. – Vol. 19, Is. 3. – P. 229-242.
13. Kuzmin O.V., Balagura A.A., Kuzmina V.V. and Khudonogov I.A. Partially ordered sets and combinatory objects of the pyramidal structure. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. – 2019. – Vol. 20, Is. 2. – P. 229-242.
14. Гозбенко В.Е., Каргапольцев С.К., Карлина А.И. Приведение динамической системы с тремя степенями свободы к главным координатам // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. – № 3 (51). – С.35-38.



15. Balagura A.A. and Kuzmin O.V. Generalized Pascal pyramids and their reciprocals. *Discrete Mathematics and Applications*. – 2007. – Vol. 17, no. 6. – P. 619-628.
16. Kuzmin O.V. and Seregina M.V. Plane sections of the generalized Pascal pyramid and their interpretations. *Discrete Mathematics and Applications*. – 2010. – Vol. 20, no. 4. – P. 377-389.

REFERENCES

1. Gaer MA, Shabalin A.V., Plonsky P.L. Description of spatial tolerances using coefficients of quadratic forms. M.: MSTU "MAMI", 2009. P. 138-144.
2. Valov A.A., Gaer M.A., Zhuravlev D.A. Representation of surface geometry using quadratic forms // *Vestnik ISTU*. 2013. No. 8. P. 22–28.
3. Gaer, MA, Zhuravlev, DA, Yatsenko, OV Configuration space surfaces of parts and assemblies. // *Bulletin of ISTU*. - 2011. - № 10. P. 32-36.
4. <http://bse.sci-lib.com/> - Great Soviet Encyclopedia.
5. <http://ru.wikipedia.org/wiki/> - Wikipedia.
6. <http://femto.com.ua/> - Encyclopedia of physics and technology.
7. Zhuravlev DA, Grushko P.Ya., Yatsenko OV On new differential-geometric approaches to computer-aided design of assemblies with regard to tolerances. *Vestnik ISTU*, No. 12, 2002. p. 82-92.
8. Aleksandrov A.D., Netsvetaev N.Yu. *Geometry: Textbook. allowance*. - M.: Science. Ch. ed. Phys.-Mat. lit., 1990. - 672 pp., ill.
9. Rosendorn E.R. *Theory of surfaces*. - 2nd ed., Pererab. and add. - M.: FIZMATLIT, 2006. - 304 p.
10. Rashevsky P.K. *Course differential geometry*. - M.L.: GTTI, 1950. - 228 p.
11. Kuzmin O.V., Khomenko A.P. and Artyunin A.I. Discrete model of static loads distribution management on lattice structures. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. - 2018. - Vol. 19, Is. 3. - P. 183-193.
12. Kuzmin O.V., Khomenko A.P. and Artyunin A.I. Development of special mathematical software using combinatorial numbers and lattice structure analysis. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. - 2018. - Vol. 19, Is. 3. - P. 229-242.
13. Kuzmin O.V., Balagura A.A., Kuzmina V.V. and Khudonogov I.A. The pyramidal structure. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. - 2019. - Vol. 20, Is. 2. - p. 229-242.
14. Gozbenko V.E., Kargapoltsev S.K., Karlina A.I. Bringing a dynamic system with three degrees of freedom to the main coordinates // *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2016. - № 3 (51). - P.35-38.
15. Balagura A.A. and Kuzmin O.V. Generalized Pascal pyramids and their reciprocals. *Discrete Mathematics and Applications*. - 2007. - Vol. 17, no. 6. - p. 619-628.
16. Kuzmin O.V. and Seregina M.V. Plane sections of the generalized Pascal pyramid and their interpretations. *Discrete Mathematics and Applications*. - 2010. - Vol. 20, no. 4. - p. 377-389.

Информация об авторах

Гаер Максим Александрович – к.т.н., доцент, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики, Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: magaer38@gmail.com

Кузьмина Елена Юрьевна – к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики, Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: quzminov@mail.ru

Authors

Maxim Alexandrovich Gaer – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor at the Department of Probability Theory and Discrete Mathematics, Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: magaer38@gmail.com

Elena Yurevna Kuzmina – Ph.D. Sci., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Probability Theory and Discrete Mathematics, Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: quzminov@mail.ru

Для цитирования

Еловенко Д. А. Тенденции развития технологии формообразования многослойных цилиндрических конструкций и методы оценки остаточных технологических напряжений / Д. А. Еловенко // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. – 2019. – Т. 62, № 2. – С. 59–66. – DOI: 10.26731/1813-9108.2019.2(62).59–66

For citation

Gaer M. A., Kuzmina E. Yu. Tendentsii razvitiya tekhnologii formoobrazovaniya mnogoslnoinykh tsilindricheskikh konstruktssii i metody otsenki ostatochnykh tekhnologicheskikh napryazhenii [Configuration varieties of square forms of surfaces details and assemblies]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling]*, 2019. Vol. 62, No. 2, pp. 59–66. DOI: 10.26731/1813-9108.2019.2(62).59–66