***УДК*** *514.85* ***DOI:*** *10.26731/1813-9108.2019.4(64).108–112*

***А. В. Данеев***

*Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ, Российская Федерация*
***Дата поступления:*** *08 мая 2019 г.*

# ПОСТРОЕНИЕ ОПОРНЫХ ПРЯМЫХ К ДВУМ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ОГРАНИЧЕННЫМ МНОЖЕСТВАМ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ В ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

**Аннотация.** *В статье предложен метод нахождения опорных прямых к двум непересекающимся ограниченным множествам точек на плоскости. Для случаев, когда множества являются выпуклыми многоугольниками, известные алгоритмы основаны на классификации вершин многоугольников и углов между опорными прямыми и сторонами многоугольников. Предложен новый критерий и алгоритм нахождения опорных прямых двух строго выпуклых многоугольников. Такие задачи могут возникать при исследовании проблем формирования траектории движения транспортных средств, в том числе и с учетом обхода опасных областей по трассе маршрута. Известные математические постановки и методологии решения задач, близких по внутреннему содержанию к проблеме формирования маршрута, либо не рассматривают возможности физической реализации получаемых с их помощью решений, либо используют фактор динамики в виде уравнений движения, что существенно усложняет алгоритмическую сторону решения проблемы. Геометрический подход, учитывающий фактор динамики, позволяет с одной стороны не опираться при синтезе управления на уравнение динамики, а с другой допускает a priori утверждать свойство реализуемости получаемого маршрута движения транспортных средств с точки зрения их допустимых маневренных возможностей. Материал статьи может составить математическую компоненту программно-математического обеспечения решения навигационной задачи по определению оптимальной (из расчета минимума длины) траектории движения транспортных средств, и удовлетворяющей требованиям по оперативной памяти и быстродействию при ее программной реализации на бортовом процессоре.*

**Ключевые слова:** *опорные прямые; геометрический подход; выпуклая оболочка; унимодальная функция; тернарный поиск; трасса маршрута.*

***A. V. Daneev***

*Buryat State University, Ulan-Ude, the Russian Federation*
***Received:*** *May 08, 2019*

# CONSTRUCTION OF SUPPORTING LINES TO TWO NON-INTERSECTING LIMITED SETS OF POINTS ON A PLANE IN THE PROBLEM OF FORMATION OF A VEHICLE TRAJECTORY

**Abstract.** *This article proposes a method for finding supporting lines to two non-intersecting, limited sets of points on the plane. For cases where the sets are convex polygons, known algorithms are based on the classification of the vertices of the polygons and the angles between the supporting lines and the sides of the polygons. A new criterion and an algorithm for finding supporting lines of two strictly convex polygons are proposed. Such problems may arise in the study of the tasks of the formation of the trajectory of movement of vehicles, including taking into account the bypass of hazardous areas along the route. Well-known mathematical statements and methodologies for solving problems whose internal content is close to the problem of forming a route either do not consider the possibility of physical implementation of the solutions obtained with their help, or use the dynamics factor in the form of equations of motion. This significantly complicates the algorithmic side of solving the problem. The geometrical approach, taking into account the dynamics factor, makes it possible, on the one hand, not to rely on the dynamics equation when synthesizing control, and on the other hand, it allows a priori asserting the feasibility property of the resulting vehicle route in terms of their allowable maneuver capabilities. The material of the article can make up a mathematical component of software and mathematical support for solving the navigation problem to determine the optimal (based on the minimum length) trajectory of vehicles and meets the requirements for RAM and speed during its software implementation on the on-board processor.*

**Keywords:** *supporting lines, geometric approach, convex hull, unimodal function, ternary search, route trace.*

## Введение

В приложениях встречаются задачи построения оптимального геометрического решения, например, формирование траектории полета летательного аппарата с минимальной длиной пути, или скоростного судна по реке и т. д. В настоящее время предложено несколько методов и алгоритмов решения таких задач [1]. В данной статье рас-


© А. В. Данеев, 2019

сматривается метод нахождения опорных прямых к двум непересекающимся ограниченным множествам точек на плоскости. Для случаев, когда множества являются выпуклыми многоугольниками, известные алгоритмы основаны на классификации вершин многоугольников и углов между опорными прямыми и сторонами многоугольников. Предложен новый критерий и алгоритм нахождения опорных прямых двух строго выпуклых многоугольников.

**Определение опорных прямых**

Приведем вначале определение опорных прямых к двум непересекающимся ограниченным множествам точек на плоскости.

Пусть *A, B* – два ограниченных множества точек на плоскости.

Прямая *L* называется опорной к множествам *A* и *B*, если каждое из этих множеств по отдельности или целиком лежит на одной из определяемых прямой *L* замкнутых полуплоскостей, и прямая *L* содержит точку из *A* и точку из *B*. Тогда, в общем случае, существует четыре опорные прямые: верхняя, нижняя и две внутренние в зависимости от их расположения относительно множеств *A* и *B* (рис. 1).

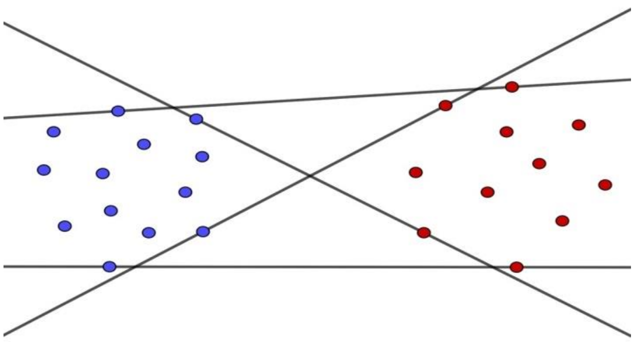

**Рис. 1. Опорные прямые**

Алгоритм нахождения опорных прямых в случае, если *A* и *B* выпуклые многоугольники, для построения выпуклой оболочки методом «разделяй и властвуй» рассмотрен в работе Ф. Препарата и С. Хонга [2]. В работах М. Шеймоса [3] и М. Овермарса предложены динамические алгоритмы построения выпуклой оболочки [4]. Данные методы основаны на классификациях вершин многоугольников и углов между опорными прямыми и сторонами многоугольников.

Ниже предлагается новый критерий для нахождения опорных прямых.

Не теряя общности, положим, что $x(a) < x(b)$ для всех $a \in A$, $b \in B$.

Рассмотрим вначале вопрос нахождения верхней опорной прямой.

Будем говорить, что точка $p$ лежит ниже прямой $l$, если она принадлежит замкнутой нижней полуплоскости, определяемой прямой $l$.

Верхней опорной прямой из точки $a \in A$ к множеству $B$ называется прямая $l$, проходящая через точку $a$ и некоторую точку $b \in B$ таким образом, что все точки множества $B$ лежат ниже прямой $l$. Верхняя опорная прямая из точки $a \in A$ к множеству $B$ имеет максимальный угол наклона по сравнению со всеми прямыми, соединяющими точку $a \in A$ с любой точкой множества $B$.

Сформулируем критерий. Прямая $l$, проходящая через точки $a^* \in A$ и $b^* \in B$, является верхней опорной прямой к множествам $A$ и $B$, если она является унимодальной.

Действительно, пусть прямая $l$ есть верхняя опорная прямая из точки $a \in A$ к множеству $B$. Тогда, по определению, точка $a$ лежит ниже прямой $l^*$, а точка $b^*$ лежит ниже прямой $l$. Отсюда следует, что угол наклона прямой $l$ больше угла наклона прямой $l^*$ (рис. 2).

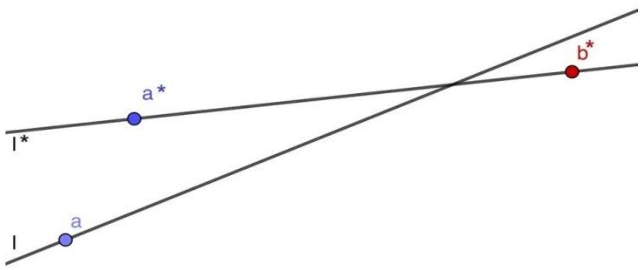


**Рис. 2. Углы наклона прямых *l* и *l*****

Пусть $A = \{a_1,\ldots, a_n\}$, $B = \{b_1,\ldots, b_m\}$, $n, m \in N$ – есть строго выпуклые многоугольники на плоскости, где $\{a_1,\ldots, a_n\}$ – последовательность вершин многоугольника $A$ (в порядке обхода по часовой стрелке), а $\{b_1,\ldots, b_m\}$ – последовательность вершин $B$. Заданы $l_a$ – индекс вершины многоугольника $A$ с наименьшей абсциссой; $r_a$ – индекс вершины с наибольшей абсциссой; $l_b$ – индекс вершины многоугольника $B$ с наименьшей абсциссой; $r_b$ – индекс вершины многоугольника $B$ с наибольшей абсциссой [5].

Пусть $l_i$ – есть опорная прямая из точки $a_i$, $l_{i+1}$ – опорная прямая из точки $a_{i+1}$, $l_a \le i < s$, $a_i$ лежит ниже прямой $l^*$.

В силу выпуклости многоугольника $A$ видно, что вершина $a_{i+1}$ лежит выше прямой $l_i$ (рис. 3). Точка $b_j$ лежит ниже прямой $l_{i+1}$ и точка $b_k$ лежит ниже прямой $l_i$ по определению опорной прямой, и потому угол наклона прямой $l_{i+1}$ меньше угла наклона прямой $l_i$.

Пусть $l_i$ – есть опорная прямая из точки $a_i$, $l_{i+1}$ – опорная прямая из точки $a_{i+1}$ к множеству $B$, $s \le i < r_a$ , где $a_{i+1}$ лежит ниже прямой $l^*$.

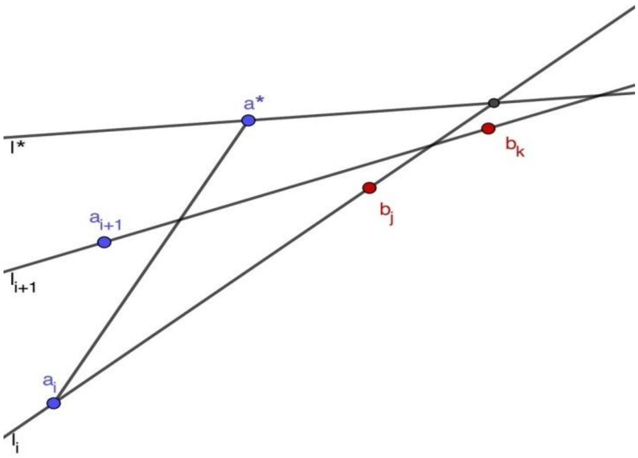


**Рис. 3. Расположение прямых $l_i$ и $l_{i+1}$**

В силу выпуклости многоугольника $A$ видно, что вершина $a_i$ лежит выше прямой $l_{i+1}$ (рис. 4). Точка $b_j$ лежит ниже прямой $l_{i+1}$ и точка $b_k$ лежит ниже прямой $l_i$ по определению опорной прямой, и потому угол наклона прямой $l_{i+1}$ больше угла наклона прямой $l_i$. Следовательно, функция угла наклона опорных прямых из точек к множеству $B$ является унимодальной на отрезке индексов $[l_a, r_a]$ и поэтому для нахождения ее минимального значения мы можем применить тернарный поиск. Таким образом, мы можем находить верхнюю опорную прямую многоугольников $A, B$ за время $O(ln(n))$.

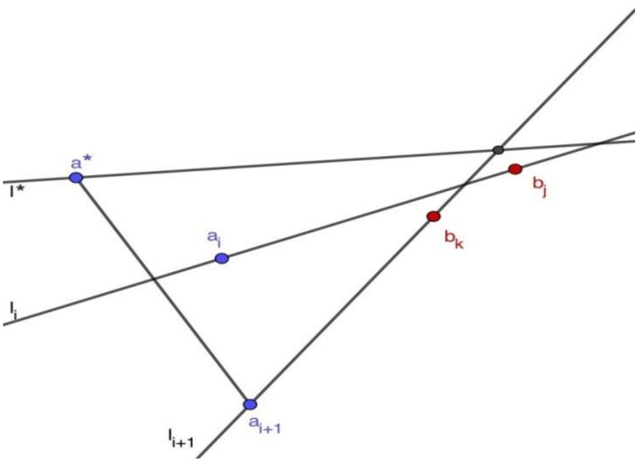


**Рис. 4. Конфигурация вершин и прямых**

В свою очередь, нахождение опорных прямых из точки $a \in A$ к многоугольнику $B$ (рис. 5), в силу его выпуклости, можно также выполнить тернарным поиском за $O(ln(m))$.

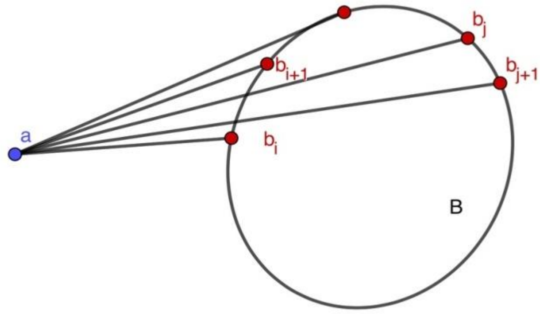


**Рис. 1. Опорные прямые из точки a**

Таким образом, нахождение верхней опорной прямой выпуклых многоугольников $A, B$ имеет асимптотическую сложность $O(ln(n)ln(m))$.

Аналогично можно находить нижнюю и внутренние опорные прямые по схемам:

– для верхней опорной прямой –

$$\min_{i\in[l_a,r_a]} \max_{j\in[l_b,r_b]} slope(i, j),$$

где $slope(I,j) = (y(b_j)–y(a_i))/ (x(b_j)–x(a_i))$ – тангенс угла наклона прямой, проходящей через вершины $a_i$ , $b_j$;

– для нижней опорной прямой –

$$\max_{i\in[l_a,r_a]} \min_{j\in[l_b,r_b]} slope(i, j),$$

– для внутренних опорных прямых –

$$\min_{i\in[l_a,r_a]} \min_{j\in[r_b,l_b+m]} slope(i, j),$$

$$\max_{i\in[r_a,l_a+n]} \max_{j\in[l_b,r_b]} slope(i, j),$$

где полагаем, что $a_i = a_{i \bmod n}, b_j = b_{j \bmod m}$.

**Заключение**

В работе изложен новый метод нахождения опорных прямых к двум непересекающимся ограниченным множествам точек на плоскости. Сформулирован новый критерий и алгоритм нахождения таких опорных прямых двух строго выпуклых многоугольников.

Материал статьи может составить математическую компоненту программно-математического обеспечения решения навигационной задачи по определению оптимальной (из расчета минимума длины) траектории движения транспортных средств, и удовлетворяющей требованиям по оперативной памяти и быстродействию при ее программной реализации на бортовом процессоре. Можно выделить и другие работы, связанные с геометрическим подходом к решению некоторых задач механики, направленных в основном на формирование маршрутов транспортных средств [6–19].

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данеев А.В., Куменко А.Е., Русанов В.А. Геометрический подход к задаче формирования траектории полета экраноплана с учетом обхода опасных областей по трассе маршрута // Изв. вузов. Авиационная техника. 1995. № 4.

2. Preparata F. P., Hong S.J. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions. Urbana-Champaign : University of Illinois, 1977. № 2 (20). P. 87–93.

3. Shamos M. I. Computational geometry. Ph. D. thesis, Dept. of Comput. Sci. Yale Univ., 1978.

4. Overmars M. H., Leeuwen J. van Maintenance of configurations in the plane, J. Comput. And Sust. 1981. Sci. 4. 166–204.

5. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М. : Мир, 1988. 478 с.

6. James R. W. Application of wave forecast to marine navigation. Washington, D.C. : US Navy Hydrographic Office, 1957. 78 p.

7. Hagiwara H. Weather routing of (sail-assisted) motor vessels. Ph D thesis. Delft : Technical University of Delft, 1989. 337 p.

8. Bijlsma S. J. A Computational Method for the Solution of Optimal Control Problems in Ship Routing // Navigation. 2001. Vol. 48. P. 145–154.

9. Chen H. A dynamic program for minimum cost ship routing under uncertainty. Ph D thesis. Massachusetts : Massachusetts Institute of Technology, 1978. 163 p.

10. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов / Е.И. Веремей и др. СПб. : НИИ Химии СПбГУ, 2002. 370 с.

11. 11.Алехин Д.В., Якименко О.А. Синтез алгоритма оптимизации траектории полета по маршруту прямым вариационным методом // Изв. акад. наук. Теория и системы управления. 1999. № 4. С. 150–167.

12. Данеев А.В., Куменко А.Е. Геометрический подход в задаче текущего планирования трассы полета экраноплана // Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Иркутск : ИГТУ, 1996. С. 35–37.

13. Данеев А.В., Куменко А.Е., Русанов В.А. Спектральная идентификация математической модели динамической системы управляемого углового движения летательного аппарата // Вост.-Сиб. авиац. сб. Иркутск : ИрГТУ, 2001. С. 65–71.

14. Александров А.А. Моделирование термических остаточных напряжений при производстве маложестких деталей : дисс. … канд. техн. наук. Иркутск, 2016. 165 с.

15. Александров А.А. Прогнозирование остаточных напряжений возникающих при термообработке алюминиевых сплавов // Инженерный вестник Дона. 2015. № 4 (38). С. 128.

16. Свидетельство № 2002611030 Программа численного моделирования управляемого полета летательного аппарата с аналоговым рулевым приводом и идентификатором / А.В. Данеев, В.А. Русанов, А.Е. Куменко ; зарегистр. 20.06.2002.

17. Данеев А.В., Русанов В.А. Геометрический подход к решению некоторых обратных задач системного анализа // Изв. вузов. Математика. 2001. № 10.

18. Пат. 155337 Рос. Федерация. МПК G 01 N 25/18. Устройство для определения коэффициентов теплоотдачи / А.А. Александров, А.В. Лившиц [и др.]. №2014154288/28 ; заявл. 30.12.14 ; опубл. 10.10.2015, Бюл. № 28.

19. Александров А.А. Прогнозирование температурного поля для определения остаточных напряжений возникающих при термической обработке алюминиевых сплавов / А.А. Александров, А.В. Лившиц // Наука и образование. 2014. № 7. С. 36–47.

## REFERENCES

1. Daneev A.V., Kumenko A.E., Rusanov V.A. Geometricheskii podkhod k zadache formirovaniya traektorii poleta ekranoplana s uchetom obkhoda opasnykh oblastei po trasse marshruta [A geometrical approach to the task of forming an ekranoplan flight path taking into account the bypass of hazardous areas along the route route]. Izvestiya vuzov. Aviatsionnaya tekhnika [University proceedings. Aeronautical engineering], No. 4, 1995.

2. Preparata F. P. and Hong S.J. University of Illinois at Urbana-Champaign. Convex hulls of finite sets of points in two and three dimensions, Comm. ACM 2(20), 87-93, Feb 1977.

3. Shamos M. I. Computational geometry. Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Univ., 1978.

4. Overmars M. H. and van Leeuwen J. Maintenance of configurations in the plane, J. Comput. And Sust. Sci. 4. 166-204 (1981)

5. Preparata F., Sheimos M. Vychislitel'naya geometriya: Vvedenie [Computational Geometry: Introduction]. Moscow: Mir Publ., 1988. 478 p.

6. James R. W., Application of wave forecast to marine navigation. Washington, D.C.: US Navy Hydrographic Office, 1957. 78 p.

7. Hagiwara H., Weather routing of (sail-assisted) motor vessels. Ph. D. thesis. Delft: Technical University of Delft, 1989. 337 p.

8. Bijlsma S. J. A Computational Method for the Solution of Optimal Control Problems in Ship Routing. Navigation. Journal of The Institute of Navigation, vol. 48, pp. 145-154, 2001.

9. Chen H. A dynamic program for minimum cost ship routing under uncertainty. Ph. D. thesis. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1978, 163 p.

10. Veremei E.I., Korchanov V.M., Korovkin M.V., Pogozhev S. V. Komp'yuternoe modelirovanie sistem upravleniya dvizheniem morskikh podvizhnykh ob"ektov [Computer simulation of motion control systems for marine moving objects]. St. Petersburg: The RDC of Chemistry of SPbGU Publ., 2002. 370 p.

11. Alekhin D.V., Yakimenko O.A. Sintez algoritma optimizatsii traektorii poleta po marshrutu pryamym variatsionnym metodom [Synthesis of an algorithm for optimizing a flight path along a route by a direct variational method]. Izvestiya Akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya [News of the Academy of Sciences. Theory and control systems], 1999. No. 4, pp. 150-167.

12. Daneev A.V., Kumenko A.E. Geometricheskii podkhod v zadache tekushchego planirovaniya trassy poleta ekranoplana [A geometric approach to the problem of the current planning of the flight path of a ground-effect vehicle]. Asimptoticheskie metody v zadachakh aerodinamiki i proektirovaniya letatel'nykh apparatov [Asymptotic methods in problems of aerodynamics and aircraft design], Irkutsk: IGTU Publ., 1996, pp. 35-37.

13. Daneev A.V., Kumenko A.E., Rusanov V.A. Spektral'naya identifikatsiya matematicheskoi modeli dinamicheskoi sistemy upravlyaemogo uglovogo dvizheniya letatel'nogo apparata [Spectral identification of a mathematical model of a dynamic system of controlled angular motion of an aircraft]. Vostochno-Sibirskii aviatsionnyi sbornik [East Siberian Aviation Collection]. Irkutsk: IrGTU Publ., 2001, pp. 65-71.

14. Aleksandrov A.A. Modelirovanie termicheskikh ostatochnykh napryazhenii pri proizvodstve malozhestkikh detalei: diss. … kand. tekhn. nauk [Modeling of thermal residual stresses in the production of semi-rigid parts: Ph.D. (Engineering) thesis]. Irkutsk: 2016. 165 p.

15. Aleksandrov A.A. Prognozirovanie ostatochnykh napryazhenii voznikayushchikh pri termoobrabotke alyuminievykh splavov [Prediction of residual stresses arising during the heat treatment of aluminum alloys]. Inzhenernyi vestnik Dona [The Engineering Bulletin of the Don], 2015. No. 4 (38), pp. 128.

16. Daneev A.V., Rusanov V.A., Kumenko A.E. Programma chislennogo modelirovaniya upravlyaemogo poleta letatel'nogo apparata s analogovym rulevym privodom i identifikatorom [Program for the numerical simulation of controlled flight of an aircraft with an analogue steering gear and identifier]. Certificate on the official registration of a computer program of the Russian Agency for Patents and Trademarks No. 2002611030 dated Jun 20, 2002.

17. Daneev A.V., Rusanov V.A. Geometricheskii podkhod k resheniyu nekotorykh obratnykh zadach sistemnogo analiza [A geometric approach to solving some inverse problems of system analysis]. Izvestiya vuzov. Matematika [News of universities. Mathematics], 2001. No. 10.

18. Aleksandrov A.A., Livshits A.V. et al. Ustroistvo dlya opredeleniya koeffitsientov teplootdachi [Device for determining heat transfer coefficients]. Pat. 155337 RF. MPK G 01 N 25/18. No.2014154288/28; applied 30.12.14 ; publ. 10.10.2015, Bull. No.28.

19. Aleksandrov A.A., Livshits A.V. Prognozirovanie temperaturnogo polya dlya opredeleniya ostatochnykh napryazhenii voznikayushchikh pri termicheskoi obrabotke alyuminievykh splavov [Prediction of the temperature field to determine the residual stresses arising during the heat treatment of aluminum alloys]. Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana [Science and Education: the scientific edition of N.E. Bauman MSTU], 2014. No.7, pp. 36-47.

## Информация об авторах

*Данеев Александр Васильевич* – доцент кафедры информационных технологий, Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ, e-mail: daneev@mail.ru

## Для цитирования

Данеев А. В. Построение опорных прямых к двум непересекающимся ограниченным множествам точек на плоскости в задаче формирования траектории движения транспортных средств // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2019. – Т. 64, № 4. – С. 108–112. – DOI: 10.26731/1813-9108.2019.4(64). 108-112

## Authors

*Aleksandr Vasil'evich Daneev* – Associate Professor of the Subdepartment of Information Technologies, Buryat State University, Ulan-Ude, e-mail: daneev@mail.ru

## For citation

Daneev A. V. Postroyeniye opornykh pryamykh k dvum neperesekayushchimsya ogra-nichennym mnozhestvam tochek na ploskosti v zadache formiro-vaniya trayektorii dvizheniya transportnykh sredstv [Construction of supporting lines to two non-intersecting limited sets of points on a plane in the problem of formation of a vehicle trajectory]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [*Modern Technologies. System Analysis. Modeling*], 2019. Vol. 64, No. 4. Pp. 108–112. DOI: 10.26731/1813-9108.2019.4(64). 108-112

***УДК** 625.111* ***DOI:** 10.26731/1813-9108.2019.4(64).112–118*

***В. В. Лёгкий, А. В. Арестов***

*Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Российская Федерация*
***Дата поступления:** 20 мая 2019 г.*

# СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ВЫСОКОТОЧНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЫ

**Аннотация**. *На Российских железных дорогах успешно введена в действие комплексная система пространственных данных, включающая в себя цифровые модели железнодорожных путей. При внедрении этой системы на железнодорожном транспорте одной из главных задач стало установление единого пространственно-временного пространства для геодезических построений с определением на всей территории России. Однако производство геодезических работ по созданию и дальнейшей эксплуатации комплексной системы пространственных данных не предусматривает включение геодинамических явлений. В случае пересечения территорий с различной геодинамической активностью железнодорожный путь будет претерпевать пространственные изменения с течением времени. Соответственно, цифровая модель такого железнодорожного пути в определенный момент перестанет удовлетворять точности построения. Предложена методика выявления геодинамических полигонов из условий обеспечения стабильности цифровых моделей путей. Разработана усовершенствованная технология геодезических работ с учетом геодинамических явлений при создании и эксплуатации цифровых моделей железнодорожных путей. Алгоритм апробирован на конкретном участке железнодорожного пути. В результате применения алгоритма среднее пространственное положение оси пути снижено на 4,1 %. Выявлен и исследован геодинамический полигон с перспективой создания цифровой модели железнодорожных путей. В результате геодинамических явлений при выполнении геодезических работ по существующей технологии в плане и в профиле средняя квадратическая ошибка между соседними геодезическими пунктами, созданными для обеспечения комплексной системы пространственных данных, превысит допустимую по истечении 4,5 лет.*

**Ключевые слова:** *железнодорожный путь; цифровая модель пути; изыскания железнодорожного пути; трехмерное моделирование; безопасность; надежность; паспортизация железных дорог; геоинформация; профилактика рисков; контроль пути.*

 *© В. В. Лёгкий, А. В. Арестов, 2019*