10. Mesarovi M., Mako D., Takahara Y., Theory of Hierarchical Multilevel Systems. Academic Press, New York, 1970, 294 p.

11. Saaty T. L. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation. New York, McGraw-Hill, 1980, 287 p.

12. Stanley R. P. Enumerative Combinatorics, Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1997, 335 p.

13. Birkhoff G., Lattice Theory. American Mathematical Society, New York, 1967, 418 p.

14. Balagura A.A., Kuz'min O. V. Obobshchennaya piramida Paskalya i chastichno uporyadochennye mnozhestva [Generalized Pascal pyramid and partially ordered set]. Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki [Surveys on Applied and Industrial Mathematics], Vol. 14, No. 1, pp. 88–91 (2007).

15. Kuz'min O. V. Obobshchennye piramidy Paskalya i ikh prilozheniya [Generalized Pascal Pyramids and their Applications]. Nauka Publ., Novosibirsk, 2000. 294 p.

16. Kuz'min O. V., Seregina M. V. Ploskie secheniya obobshchennoi piramidy Paskalya i ikh interpretatsii [Plane sections of the generalised Pascal pyramid and their interpretations]. [Discrete Mathematics and Application], 2010, Vol. 20, No. 4, pp. 377–389.

17. Kuz'min O. V., Khomenko A. P., Artyunin A. I. Discrete model of static loads distribution management on lattice structures. Advances and Applications in Discrete Mathematics, 2018, Vol. 19, Iss. 3, pp. 183–193.

18. Kuz'min O. V., Khomenko A. P., Artyunin A. I. Development of special mathematical software using combinatorial numbers and lattice structure analysis. Advances and Applications in Discrete Mathematics, 2018, Vol. 19. Iss. 3, pp. 229–242.

19. Kuz'min O. V., Starkov B. A. Ierarkhicheskie struktury tipa treugol'nika Paskalya i postroenie navigatsionnykh marshrutov [Hierarchical structures of the Pascal triangle type and the construction of navigation routes]. [Current problems of science in the Baikal region]. Irkutsk State University Publ., Irkutsk, 2020, Vol. 3, pp. 119–123.

20. Lavlinskaya A. A., Fil' G. A., Kamnev M. D. Sozdanie modeli kvadrokoptera-ekologa [Creation of a quadcopter-ecolog model]. Prikladnye voprosy diskretnogo analiza: sb. nauch. tr. [Applied issues of discrete analysis: collection of research papers]. Irkutsk State University Publ., Irkutsk, 2020, Vol. 5, pp. 78–83

Информация об авторах

Кузьмин Олег Викторович – д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и дискретной математики, Иркутский государственный университет, г. Иркутск, e-mail: quzminov@mail.ru

Лавлинский Максим Викторович – соискатель, кафедра теории вероятностей и дискретной математики, Иркутский государственный университет, г. Иркутск, e-mail: LavlinskiMV@mail.ru

Information about the authors

Oleg V. Kuz'min – Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Prof., Head of the Subdepartment of Probability Theory and Discrete Mathematics, Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: quzminov@mail.ru

Maksim V. Lavlinskii – external Ph.D. student, the Subdepartment of Probability Theory and Discrete Mathematics, Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: LavlinskiMV@mail.ru

DOI 10.26731/1813-9108.2020.2(66).143-150 **УДК** 62-97/98

Методика исследования несимметричных режимов синхронных машин на основе интегральных уравнений Вольтерра второго рода

А. В. Данеев [1], Р. А. Данеев [2], В. Н. Сизых [1]✉
[1]*Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация*
[2]*Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, Российская Федерация*
✉ sizykh_vn@mail.ru

Резюме

В промышленности решение многих проблем напрямую связано с разработкой и исследованием синхронных машин, которые работают на выпрямительную (несимметричную) нагрузку. В них играют фундаментальную роль переходные процессы, которые в синхронных машинах описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений. При исследовании синхронных машин достаточно рассмотреть электромагнитные переходные процессы в силу большой инерционной постоянной машины. Уравнения становятся линейными, но с периодическими коэффициентами, которые также не имеют общего решения, поскольку содержат периодические коэффициенты. Возможности практического применения таких уравнений ограничиваются в общем случае трудностями, связанными с определением собственных чисел. В работе применяется преобразование дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами на основе представления системы с периодическими коэффициентами матричным интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Исследование проводится на примере трехфазного магнитоэлектрического генератора, работающего на активно-индуктивную нагрузку. В статье на основе сопоставления с классической теорией систем с периодическими коэффициентами установлено, что постоянная матрица B не является строго определенной в рассмотренном методе. Предложенный метод моделирования позволяет исследовать как симметричные, так и несимметричные переходные процессы в синхронных машинах. Метод не имеет ограничения, связанного с синусоидальным пространственным распределением магнитодвижущих сил обмоток синхронных машин, и может быть применен с учетом высших гармоник индуктивностей таких машин.

Ключевые слова

синхронные машины, переходные процессы, несимметричные режимы, уравнение Вольтерра второго рода

Для цитирования
Данеев А.В. Методика исследования несимметричных режимов синхронных машин на основе интегральных уравнений Вольтерра второго рода / А.В. Данеев, Р.А. Данеев, В.Н. Сизых // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2020. – Т. 66 № 2. – С. 143–150. – DOI: 10.26731/1813-9108.2020.2(66).143-150

Информация о статье
поступила в редакцию: 20.02.2020, поступила после рецензирования: 14.03.2020, принята к публикации: 22.03.2020

A methodology for researching asymmetric modes of synchronous machines based on the Volterra integral equations of the second kind

A. V. Daneev [1], R. A. Daneev [2], V. N. Sizykh [1]✉
[1] *Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation*
[2] *East Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk, the Russian Federation*
✉ sizykh_vn@mail.ru

Abstract
In industry, the solution to many problems is directly related to the development and research of synchronous machines, which operate into a rectifier (asymmetric) load. Transients, which are described by a system of nonlinear differential equations in synchronous machines, play a fundamental role in it. In the study of synchronous machines, it suffices to consider electromagnetic transients due to the large inertial constant of the machine. The equations become linear, but with periodic coefficients, which also do not have a common solution, since they contain periodic coefficients. The possibilities for the practical application of such equations are generally limited by the difficulties associated with the determination of eigenvalues. In this work, we apply the transformation of differential equations with periodic coefficients to equations with constant coefficients based on the repre-sentation of a system with periodic coefficients by the Volterra matrix integral equation of the second kind. The consideration is carried out by the example of a three-phase magnetoelectric generator operating on an active-inductive load. Based on a compari-son with the classical theory of systems with periodic coefficients, the article established that the constant matrix *B* is not strictly defined in the considered method. The proposed modeling method allows us to study both symmetric and asymmetric transients in synchronous machines. The method does not have a limitation associated with the sinusoidal spatial distribution of the magnet-ic driving force of the synchronous machine windings and can be applied taking into account the higher harmonics of the induct-ances of synchronous machines.

Keywords
synchronous machines, transients, asymmetric modes, the Volterra equation of the second kind

For citation
Daneev A.V., Daneev R.A., Sizykh V.N. Metodika issledovaniya nesimmetrichnykh rezhimov sinkhronnykh mashin na osnove integral'nykh uravnenii Vol'terra vtorogo roda [A methodology for researching asymmetric modes of synchronous machines based on the Volterra integral equations of the second kind]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [*Modern Technologies. System Analysis. Modeling*], 2020, Vol. 66, No. 2, pp. 143–150. DOI: 10.26731/1813-9108.2020.2(66).143-150

Article info
Received: 20.02.2020, Revised: 14.03.2020, Accepted: 22.03.2020

Введение

Решение ряда проблем в промышленности связано с разработкой и исследованием синхронных машин (СМ), работающих на выпрямительную (несимметричную) нагрузку. В таких машинах переходные процессы (ПП) играют фундаментальную роль.

В общем случае ПП в СМ описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений и не имеют общего решения: $\omega = var$. Однако в большинстве случаев исследования СМ достаточно рассмотреть электромагнитные ПП (ω = const) в силу большой инерционной постоянной машины. Уравнения становятся линейными, но с периодическими коэффициентами, которые, однако, также не имеют общего решения, поскольку содержат периодические коэффициенты. Возможности практического применения таких уравнений ограничиваются в общем случае трудностями, связанными с определением собственных чисел.

Для некоторых нестационарных систем оказывается возможным переход с помощью преобразования координат от уравнений с переменными коэффициентами к уравнениям с постоянными коэффициентами без решения задачи определения собственных чисел. К таким системам относятся СМ. Удобные для практики результаты получены в работе А.А Горева [1] на основе линейного ортогонального преобразования к вращающимся осям *d*, *q*, 0. В то же время такое преобразование имеет ряд ограничений:

– не позволяет избавиться от периодических коэффициентов в случае общей несимметрии фаз и при работе СМ на несимметричную нагрузку;

– СМ рассматривается как источник синусоидальной ЭДС без учета высших гармонических составляющих.

Поэтому при исследовании несимметричных режимов СМ предпочтительно использовать систему в фазовых координатах. Однако, как показывают расчеты, обратная матрица индуктивности при приведении системы к нормальной форме оказывается слабо обусловленной, что ведет при моделировании на ЭВМ в физических единицах к потере точности вычислений и к большим затратам машинного времени.

Поскольку в классе линейных преобразований ортогональное преобразование является единственно точным, то решение задачи моделирования систем, работающих в несимметричных режимах, следует искать с помощью приближенного преобразования известного числа дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к тому же числу уравнений с постоянными коэффициентами.

К числу таких преобразователей относится преобразование, выполненное на основе представления системы с периодическими коэффициентами матричным интегральным уравнением Вольтерра второго рода [2–4].

Постановка задачи исследования многофазных синхронных машин

Рассмотрим возможность приведения системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами на примере трехфазного магнитоэлектрического генератора, работающего на активно-индуктивную нагрузку.

Влиянием демпферных контуров пренебрегаем. Остальные допущения те же, что и в работе А.Ш. Важнова [5].

Обозначим индексами *a*, *b*, *c*, *m* обмотки фаз *a*, *b*, *c* и «фиктивную» обмотку постоянного магнита *m*.

Тогда уравнения баланса напряжений СМ запишутся в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = -R\,i + u, \tag{1}$$

где

$$u = R_{н} i + L_{н} \frac{di}{dt}, \tag{2}$$

$u = [u_a, u_b, u_c, -u_m]^T$ – вектор мгновенных значений напряжений; $\psi = [\psi_a, \psi_b, \psi_c, \psi_m]^T$ – вектор потокосцепления обмоток СМ; $R = diag(R, R, R, 0)$ – матрица активных сопротивлений фазных обмоток; $i = [i_a, i_b, i_c, I_m]^T$ – вектор мгновенных значений токов; $L_{н} = diag(L_{н}, L_{н}, L_{н}, 0)$ – матрица индуктивностей нагрузки; $R_{н} = diag(R_{н}, R_{н}, R_{н}, 0)$ – матрица активных сопротивлений нагрузки.

Для линейной системы потокосцепления можно записать

$$\psi = L\,i, \tag{3}$$

где $L = \begin{bmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} & M_{am} \\ M_{ab} & L_b & M_{bc} & M_{bm} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c & M_{cm} \\ M_{ma} & M_{mb} & M_{mc} & L_m \end{bmatrix}$ – матрица индуктивностей и взаимных индуктивностей соответствующих обмоток –

$L_a = l_0 + L_s + l_2 \cos 2\gamma,\ L_b = l_0 + L_s +$
$+ l_2 \cos(2\gamma + 120),\ L_c = l_0 + L_s + l_2 \cos(2\gamma - 120),$
$M_{ba} = M_{ab} = m_0 + M_s + l_2 \cos(2\gamma + 120),$
$M_{cb} = M_{bc} = m_0 + M_s + l_2 \cos 2\gamma,$
$M_{am} = M_{ma} = M_{md} \cos\gamma,\ M_{mb} = M_{bm} =$
$= M_{md} \cos(\gamma - 120),$
$M_{mc} = M_{cm} = M_{md} \cos(\gamma + 120),$
$L_m = const,\ m_0 = -\frac{l_0}{2},\ M_s = -\frac{L_s}{2},$

смысл коэффициентов $l_0,\ l_2,\ L_s,\ M_{md}$ тот же [5].

Уравнения (1), разрешенные относительно фазных токов, с учетом (2) и (3) имеют вид

$$\frac{di}{dt} = A(t)\,i, \tag{4}$$

где

$$A(t) = (L - L_{н})^{-1} \left(R_{н} - R - \frac{dL}{dt} \right) = A(t+T) \tag{5}$$

– периодическая матрица параметров СМ и нагрузки с периодом T=2π и размерности 4×4.

Решение (4) имеет вид

$$i = \Phi(t,\tau) i_0,$$

где $\Phi(t,\tau)$ – фундаментальная матрица, имеющая ту же размерность, что и матрица *A*, она является решением матричной системы

$$\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(\tau,\tau) = E;$$

где i_0 – вектор начальных токов в момент времени τ.

Обозначим

$$\Phi(t) \mathrel{\hat=} \Phi(t,\,0) = \Phi(t,\tau)\big|_{\tau=0},\ \Phi(0,\,0) = \Phi(0) = E,$$

где *E* – единичная матрица размерности 4×4.

Тогда

$$\dot\Phi(t) = A(t)\Phi(t). \tag{6}$$

При выполнении условия (5) фундаментальная матрица системы (4) удовлетворяет тождеству

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\,\Phi(T), \tag{7}$$

где $\Phi(T)\hat{=}\Phi(t)\big|_{t=T}$ – матрица монодромии (матрицант системы (4)).

Справедливость тождества (7) проверяется подстановкой (7) в (6) при выполнении условия (5).

Аналитическое решение интегральных уравнений Вольтерра второго рода на основе метода последовательных приближений

Основное положение классической теории систем с периодическими коэффициентами базируется на теореме Флоке – Ляпунова: для уравнения (4) с периодической непрерывной периода *T* матрицей *A* существует непрерывная, неособая периодическая периода *T*, имеющая кусочно-непрерывно интегрируемую производную матрицу преобразования

$$V(t)=\Phi(t)\exp(-Bt), \tag{8}$$

такая, что замена

$$i=V(t)\,y \tag{9}$$

приводит матричное уравнение (4) к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt}=B\,y. \tag{10}$$

Теорема сформулирована в работе «Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения» [6], а первый пример ее практической реализации в приведен в статье В.М. Лупкина [7].

Согласно этой теореме фундаментальная матрица может быть выражена через матрицу преобразования

$$\Phi(t)=V(t)\exp(B\,t). \tag{11}$$

В формуле (11) заменим *t* на *t+T:*

$$\Phi(t+T)=V(t+T)\exp(B\,t+BT)= \\ =\Phi(t)\exp(BT). \tag{12}$$

Из сравнения (12) и (7) имеем

$$B=\frac{1}{T}\ln\Phi(t). \tag{13}$$

Следует отметить, что постоянная матрица не является строго определенной, так как значение $\ln\Phi(t)$ многозначно [6].

Покажем, что последнее утверждение справедливо для метода [2, 3].

Продифференцируем уравнение (8) с учетом (11) и (13)

$$\dot V(t)=A(t)V(t)-V(t)\exp(Bt)B\exp(-Bt). \tag{14}$$

С другой стороны подстановка (9) и (10) в (4) дает

$$\dot V(t)=A(t)V(t)-V(t)B. \tag{15}$$

Нетрудно заметить, что формула (15) является частным случаем (14) при $\exp(Bt)\cong E,\ \exp(-Bt)\cong E.$

Разложим матричные экспоненты (экспоненциалы) в ряд Тейлора и подставим в выражение (14):

$$\exp(Bt)\cong E+Bt+\frac{B^2}{2!}t^2+\ldots+\frac{B^n}{n!}t^n,$$

$$\exp(-Bt)\cong E-Bt+\frac{B^2}{2!}t^2+\ldots+(-1)^n\frac{B^n}{n!}t^n.$$

Тогда

$$\dot V(t)=A(t)V(t)-V(t)\left\{B+(-1)^n\frac{B^{2n+1}}{(n!)^2}t^{2n}\right\}. \tag{16}$$

Уравнение (16) эквивалентно интегральному матричному уравнению Вольтерра второго рода

$$V(t)=V(0)+\int_0^t\left\{A(\theta)\cdot V(\theta)+\right. \\ \left.+V(\theta)\left[B+(-1)^n\frac{B^{2n+1}}{(n!)^2}\theta^{2n}\right]\right\}d\theta, \tag{17}$$

где $V(0)=\Phi(0)\exp(-B\cdot 0)=E,\quad n=1,2,\ldots$

Сделаем замену $\theta=\varepsilon\phi$ ($\gamma=\dfrac{t}{\varepsilon}$) и перепишем (17) в виде

$$V(\gamma,\varepsilon)=V(0,\varepsilon)+\varepsilon\int_0^\gamma\left\{A(\varphi)\cdot V(\varphi,\varepsilon)-\right. \\ \left.-V(\varphi,\varepsilon)\left[B(\varepsilon)+(-1)^n\varepsilon^{2n}\frac{B(\varepsilon)^{2n}}{(n!)^2}\varphi^{2n}\right]\right\}d\varphi, \tag{18}$$

где $V(0,\varepsilon)=E,\ \varepsilon=\dfrac{1}{\omega}$ – «малый» параметр.

Заметим, что в уравнении (18) являются неизвестными матрица преобразования $V(\gamma,\varepsilon)$ и постоянная матрица $B(\varepsilon)$. Согласно [3] решение (18) может быть получено в виде абсолютно сходящегося относительно параметра ε ряда методом последовательных приближений Пикара:

$$V(\gamma,\varepsilon)=V(0,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_k(\gamma), \tag{19}$$

где

$$V_k(\gamma)=\int_0^\gamma\left\{A(\varphi)\cdot V_{k-1}-\right. \\ \left.-V_{k-1}\left[B(\varepsilon)+(-1)^n\varepsilon^{2n}\frac{B(\varepsilon)^{2n+1}}{(n!)^2}\varphi^{2n}\right]\right\}d\varphi, \tag{20}$$

$k=1,2,\ldots\ n=1,2,\ldots.\ V_0=E$ (при $k=1$).

В [8] показана сходимость ряда (19) через существование постоянной матрицы *B*, записанной аналитически относительно параметра ε

$$B(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}B_k\ . \qquad (21)$$

Подставим (21) в матричное уравнение (20) и сравним в нем коэффициенты при одинаковых степенях k в исходном (19) и преобразованном с учетом (20) и (21) уравнениях

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_k(\gamma)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^{\gamma}\left\{A(\varphi)\cdot V_{k-1}-\right.$$

$$\left.-V_{k-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}B_k+(-1)^n\varepsilon^{2n}\frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty}B_k\right)^{2n+1}}{(n!)^2}\varphi^{2n}\right]\right\}d\varphi\ .(22)$$

В тождестве (22) при n = 1, 2 определяем число членов разложения экспоненциалов в ряд Тейлора в формуле (16) без учета нулевой составляющей этого разложения.

Используя условие периодичности системы (4)

$$V_k(T)=V_k(0)=\vec{0},\ \ k=1,2,...,$$

получим формулы, определяющие матричные коэффициенты **в** разложениях рядов (20) и (21).

При определении матриц $V(\gamma,\ \varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ ограничимся двумя важными для практики случаями [4].

Нулевое приближение экспоненциалов

Случай нулевого приближения экспоненциалов

$$\exp(Bt)\cong E,\ \exp(-Bt)\cong E$$

рассмотрен в работе [3]. Действительно, из формулы (8) следует: $V(t)=\Phi(t)$, т. е. предложенный метод [3] является по существу алгоритмом определения фундаментальной (переходной) матрицы системы (4).

Алгоритм вычислений сводится к следующему:

1. Матрица приведения $V(\gamma,\varepsilon)$ и постоянная матрица $B(\varepsilon)$ представляются в виде абсолютно сходящихся рядов по формулам (20) и (21), в которых

$$B_1=\frac{1}{T}\int_0^T A(\varphi)d\varphi,$$

$$V_1(\gamma)=\int_0^{\gamma}\left(A(\varphi)-B_1\right)d\varphi,$$

$$B_{k+1}=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{A(\varphi)V_{k+1}(\varphi)-V_{k+1}(\varphi)B_1-...-V_1(\varphi)B_{k+1}\right\}d\varphi,$$

$$V_{k+1}(\gamma)=\int_0^{\gamma}\left\{A(\varphi)V_k(\varphi)-V_k(\varphi)B_1-...-V_1(\varphi)B_k-B_{k+1}\right\}d\varphi.$$

2. Решается система уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt}=B(\varepsilon)\,y$$

с начальными условиями $y_0=V(0,\ \varepsilon)^{-1}i_0$.

3. Определяются переменные состояния системы (4) в фазных координатах

$$i=V(\gamma,\ \varepsilon)\,y\ .$$

Линейное приближение экспоненциалов (n = 1)

Тождество (22) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k V_k(\gamma)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\int_0^{\gamma}\left\{A(\varphi)\cdot V_{k-1}-\right.$$

$$\left.-V_{k-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}B_k-0,25\varepsilon^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k-1}B_k\right)^3\varphi^2\right]\right\}d\varphi\ .$$

Для первого приближения метода (k= 1) имеем

$$V_1(\gamma)=\int_0^{\gamma}\left\{A(\varphi)-B_1+0,25\varepsilon^2B_1^3\varphi^2\right\}d\varphi.$$

Из условия периодичности матрицы $V_1(\gamma)$

$$V_1(T)=\int_0^T\left\{A(\varphi)-B_1+0,25\varepsilon^2B_1^3\varphi^2\right\}d\varphi=0$$

определим матрицу $\boldsymbol{B_1}$**:**

$$B_1-\frac{\pi^2\varepsilon^2}{3}B_1^3=\frac{1}{T}\int_0^T A(\varphi)d\varphi\ .$$

Таким образом, матрица $B(\varepsilon)$ не является строго определенной, что согласуется с результатами, полученным из классической теории (формула (13)).

Однако ввиду малости параметра ε можно считать

$$B_1\cong\frac{1}{T}\int_0^T A(\varphi)d\varphi\ .$$

Для последующих приближений алгоритма можно поступать следующим образом: матрицу B_1 определять приближенно, используя условие малости параметра ε, а матрицу преобразования $V(t)$ вычислять с учетом величин, вносимых в алгоритм вычислений от последующих членов разложения экспоненциалов в ряд Тейлора.

Недостатком метода является ограничение в области низких частот. С уменьшением частоты ω параметр ε увеличивается, сходимость рядов (20) и (21) ухудшается и, следовательно, возникает необходимость рассмотрения большего числа членов ряда.

Пример расчета переходных процессов синхронных машин на основе решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода

Применим к системе (4) изложенный метод. При этом ограничимся первым приближением алгоритма

$$V(\gamma,\varepsilon)=E+\varepsilon V_1(\gamma),$$

где

$$V_1(\gamma)=\int_0^{\gamma}\{A(\varphi)-B_1\}d\varphi,$$

$$B(\varepsilon)=B_1,$$

$$B_1=\frac{1}{T}\int_0^{T}A(\varphi)d\varphi,\quad T=2\pi.$$

Матрицы постоянных коэффициентов и преобразования для трехфазного магнитоэлектрического генератора имеют вид

$$B(\varepsilon)=\begin{bmatrix}A_0 & B_0 & C_0 & 0\\ C_0 & A_0 & B_0 & 0\\ B_0 & C_0 & A_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$V(\gamma,\varepsilon)=\begin{bmatrix}V_{11}(\gamma,\varepsilon) & V_{12}(\gamma,\varepsilon) & V_{13}(\gamma,\varepsilon) & V_{14}(\gamma,\varepsilon)\\ V_{21}(\gamma,\varepsilon) & V_{22}(\gamma,\varepsilon) & V_{23}(\gamma,\varepsilon) & V_{24}(\gamma,\varepsilon)\\ V_{31}(\gamma,\varepsilon) & V_{32}(\gamma,\varepsilon) & V_{33}(\gamma,\varepsilon) & V_{34}(\gamma,\varepsilon)\\ V_{41}(\gamma,\varepsilon) & V_{42}(\gamma,\varepsilon) & V_{43}(\gamma,\varepsilon) & V_{44}(\gamma,\varepsilon)\end{bmatrix},$$

где элементы матрицы преобразования определяются выражениями:

$$V_{11}(\gamma,\varepsilon)=1+\frac{\varepsilon}{2}(A_1+A_2\sin 2\gamma-A_1\cos 2\gamma),$$

$$V_{12}(\gamma,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}(\frac{\sqrt{3}A_2}{2}+\frac{A_1}{2}+$$
$$+A_2\sin(2\gamma-120)-A_1\cos(2\gamma-120)),$$

$$V_{13}(\gamma,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}A_2}{2}-\frac{A_1}{2}+\right.$$
$$\left.+A_2\sin(2\gamma+120)-A_1\cos(2\gamma+120)\right),$$

$$V_{22}(\gamma,\varepsilon)=1+\frac{\varepsilon}{2}\left(-\frac{A_1}{2}-\frac{\sqrt{3}A_2}{2}+\right.$$
$$\left.+A_2\sin(2\gamma+120)-A_1\cos(2\gamma+120)\right),$$

$$V_{23}(\gamma,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}\left(A_1+A_2\sin 2\gamma-A_1\cos 2\gamma\right),$$

$$V_{33}(\gamma,\varepsilon)=1+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{A_1}{2}+\frac{\sqrt{3}A_2}{2}+\right.$$
$$\left.+A_2\sin(2\gamma-120)-A_1\cos(2\gamma-120)\right),$$

$$V_{21}(\gamma,\varepsilon)=V_{12}(\gamma,\varepsilon),V_{31}(\gamma,\varepsilon)=V_{13}(\gamma,\varepsilon),$$
$$V_{23}(\gamma,\varepsilon)=V_{32}(\gamma,\varepsilon),$$

$$V_{14}(\gamma,\varepsilon)=-D_1\varepsilon(1+\cos\gamma),$$

$$V_{24}(\gamma,\varepsilon)=-D_1\varepsilon(1+\cos(\gamma-120)),$$

$$V_{34}(\gamma,\varepsilon)=-D_1\varepsilon\left(1+\cos(\gamma+120)\right),$$

$$V_{41}(\gamma,\varepsilon)=\varepsilon\left(D_2+D_3\sin\gamma-D_2\cos\gamma\right),$$

$$V_{42}(\gamma,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{\sqrt{3}}{2}D_3-\frac{1}{2}D_2+\right.$$
$$\left.+D_3\sin(\gamma-120)-D_2\cos(\gamma-120)\right),$$

$$V_{43}(\gamma,\varepsilon)=\varepsilon\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}D_3+\frac{1}{2}D_2+\right.$$
$$\left.+D_3\sin(\gamma+120)-D_2\cos(\gamma+120)\right),\quad V_{44}(\gamma,\varepsilon)=1.$$

Коэффициенты A_0, B_0, C_0, A_1, A_2, D_1, D_2, D_3 зависят от параметров СМ и нагрузки [9].

Ряд близких и смежных вопросов моделирования объектов такой физической природы рассмотрен в работах [10–19].

Заключение

Таким образом, на основе сопоставления с классической теорией систем с периодическими коэффициентами установлено, что постоянная матрица B в методе, изложенном в работе «Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения» [6], не является строго определенной. Предложенная методика моделирования позволяет:

1. Исследовать как симметричные, так и несимметричные переходные режимы в СМ.

2. Снять ограничения, связанные с синусоидальным пространственным распределением МДС обмоток при учете высших гармонических составляющих в матрице индуктивностей и взаимных индуктивностей СМ.

Список литературы

1. Горев А.А. Переходные процессы синхронной машины. М.: СЭИ, 1950. 551 с.
2. Еругин Н.П. Приводимые системы // Труды МИАН им. М.А. Стеклова, 1946. Т. 12. С. 3–96.
3. Бреус К.А. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Укр. матем. журн. 1960, Т. 12. № 4. С. 25–32.

4. Лупкин В.М. Обобщение методов приведений и аналитического решения уравнений несимметричных электрических машин // Электричество, 1985. № 2. С. 22–29.

5. Важнов А.Ш. Переходные процессы в машинах переменного тока. Л.; Энергия, 1980. 320 с.

6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.; Наука, 1972. 720 с.

7. Лупкин В.М. Аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений вентильного двигателя // Электричество. 1981. № 6. С. 22–31.

8. Бреус К.А. О приводимости канонической системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // ДАН СССР, 1958. Т. 123. № 1. С. 21–25.

9. Александров А.А., Данеев Р.А., Сизых В.Н. К вопросу моделирования вентильных синхронных машин на основе квазианалитического метода // Известия Самарского научного центра РАН, 2019. Т. 21. № 4. С. 63–69.

10. Данеев А.В., Русанов В.А. Об одном классе сильных дифференциальных моделей над счетным множеством динамических процессов конечного характера // Известия высших учебных заведений. Математика. 2000. № 2. С. 32–40.

11. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V. Inverse problem of nonlinear systems analysis: a behavioral approach // Advances in Differential Equations and Control Processes, 2012. Т. 10. № 2. Pp. 69–88.

12. Данеев А.В., Лакеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. К теории реализации сильных дифференциальных моделей. I // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005. Т. 8. № 1 (21). С. 53–63.

13. Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. Нестационарная реализация Калмана-Месаровича в конструкциях оператора Релея-Ритца // Кибернетика и системный анализ, 2007. № 1. С. 82–91.

14. Сизых В.Н., Мухопад А.Ю. Ассоциативный автомат адаптивного управления технологическими процессами на основе нейронных сетей // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета, 2014. № 1 (54). С. 34–45.

15. Сизых В.Н. Итерационно-релаксационный метод нелинейного синтеза регуляторов // Автоматика и телемеханика, 2005. № 6. С. 47–58.

16. Мухопад Ю.Ф., Пашков Н.Н., Сизых В.Н. Адаптивный подход к нейронному управлению одним классом абсолютно устойчивых систем // Фундаментальные исследования, 2011. № 8-1. С. 139–147.

17. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В., Сизых В.Н. К апостериорному моделированию нестационарных гиперболических систем // Известия Самарского научного центра РАН, 2018. Т. 20. № 1 (81). С. 106–113.

18. Сизых В.Н. Итерационно-релаксационный метод приближенно-оптимального синтеза регуляторов // Доклады Академии наук, 2000. Т. 371. № 5. С. 574–576.

19. Агеев А.М., Сизых В.Н. Синтез оптимальных регуляторов системы управления самолетом через решение обратной задачи АКОР // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета, 2014. № 3 (56). С. 7–22.

References

1. Gorev A.A. Perekhodnye protsessy sinkhronnoi mashiny [Transients of a synchronous machine]. Moscow: SEI Publ., 1950,551 p.

2. Erugin N.P. Privodimye sistemy [Reducible systems]. [Proceedings of Steklov Mathematical Institute of the RAS], 1946, Vol. 12, pp. 3–96.

3. Breus K.A. Ob odnom klasse lineinykh differentsial'nykh uravnenii s periodicheskimi koeffitsientami [On a class of linear differential equations with periodic coefficients]. Ukr. matem. zhurn. [Ukrain. math. journal], 1960, Vol. 12, No. 4, pp. 25–32.

4. Lupkin V.M. Obobshchenie metodov privedenii i analiticheskogo resheniya uravnenii nesimmetrichnykh elektricheskikh mashin [A generalization of the reduction methods and the analytical solution of the equations of asymmetric electric machines]. Elektrichestvo [Electricity], 1985, No. 2, pp. 22–29.

5. Vazhnov A.Sh. Perekhodnye protsessy v mashinakh peremennogo toka [Transients in AC machines]. Leningrad: Energiya Publ., 1980, 320 p.

6. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Lineinye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications]. Moscow; Nauka Publ., 1972, 720 p.

7. Lupkin V.M. Analiticheskoe reshenie lineinykh differentsial'nykh uravnenii ventil'nogo dvigatelya [Analytical solution of linear differential equations of a valve motor]. Elektrichestvo [Electricity], 1981, No. 6, pp. 22–31.

8. Breus K.A. O privodimosti kanonicheskoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s periodicheskimi koeffitsientami [On the reducibility of the canonical system of differential equations with periodic coefficients]. Doklady Akademii Nauk SSSR [Papers of the Academy of Sciences of the USSR], 1958, Vol. 123, No. 1, pp. 21–25.

9. Aleksandrov A.A., Daneev R.A., Sizykh V.N. [On the issue of modeling synchronous valve machines based on the quasianalytic method]. [Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2019, Vol. 21, No. 4, pp. 63–69.

10. Daneev A.V., Rusanov V.A. Ob odnom klasse sil'nykh differentsial'nykh modelei nad schetnym mnozhestvom dinamicheskikh protsessov konechnogo kharaktera [On a class of strong differential models over a countable set of dynamical processes of a finite nature]. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika [Bulletin of Higher Education. Mathematics], 2000, No. 2, pp. 32–40.

11. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V. Inverse problem of nonlinear systems analysis: a behavioral approach. Advances in Differential Equations and Control Processes, 2012, Vol. 10, No. 2, pp. 69–88.

12. Daneev A.V., Lakeev A.V., Rusanov V.A., Rusanov M.V. K teorii realizatsii sil'nykh differentsial'nykh modelei [On the theory of the implementation of strong differential models]. Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2005, Vol. 8, No. 1 (21), pp. 53–63.

13. Daneev A.V., Rusanov V.A., Sharpinskii D.Yu. Nestatsionarnaya realizatsiya Kalmana-Mesarovicha v konstruktsiyakh operatora Releya-Rittsa [Unsteady Kalman-Mesarovich implementation in the constructions of the Rayleigh-Ritz operator]. Kibernetika i sistemnyi analiz [Cybernetics and System Analysis], 2007, No. 1, pp. 82–91.

14. Sizykh V.N., Mukhopad A.Yu. Assotsiativnyi avtomat adaptivnogo upravleniya tekhnologicheskimi protsessami na osnove neironnykh setei [The associative automaton of adaptive control of technological processes on the basis of neural networks]. Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Scientific Herald of Novosibirsk State Technical University], 2014, No. 1 (54), pp. 34–45.

15. Sizykh V.N. Iteratsionno-relaksatsionnyi metod nelineinogo sinteza regulyatorov [The iterative-relaxation method of nonlinear synthesis of controllers]. Avtomatika i telemekhanika [Automation and Telemechanics], 2005, No. 6, pp. 47–58.

16. Mukhopad Yu.F., Pashkov NN, Sizykh V.N. Adaptivnyi podkhod k neironnomu upravleniyu odnim klassom absolyutno ustoichivykh sistem [An adaptive approach to neural control of one class of absolutely stable systems]. Fundamental'nye issledovaniya [Fundamental Research], 2011, No. 8-1, pp. 139–147.

17. Daneev A.V., Rusanov V.A., Rusanov M.V., Sizykh V.N. K aposteriornomu modelirovaniyu nestatsionarnykh giperbolicheskikh sistem [On a posteriori modeling of non-stationary hyperbolic systems]. Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN [Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2018, Vol. 20, No. 1 (81), pp. 106–113.

18. Sizykh V.N. Iteratsionno-relaksatsionnyi metod priblizhenno-optimal'nogo sinteza regulyatorov [The iterative-relaxation method of approximate optimal synthesis of regulators]. Doklady Akademii Nauk [Papers of the Academy of Sciences], 2000, Vol. 371, No. 5, pp. 574–576.

19. Ageev A.M., Sizykh V.N. Sintez optimal'nykh regulyatorov sistemy upravleniya samoletom cherez reshenie obratnoi zadachi AKOR [Synthesis of optimal controllers for an airplane control system by solving the inverse problem of analytical design of optimal controllers]. Nauchnyi vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Scientific Herald of Novosibirsk State Technical University], 2014, No. 3 (56), pp. 7–22.

Информация об авторах

Данеев Алексей Васильевич – д. т. н., профессор кафедры информационных систем и защиты информации, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: daneev@mail.ru

Данеев Роман Алексеевич – к. т. н., доцент кафедры информационно-правовых дисциплин, Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск, e-mail: romasun@mail.ru

Сизых Виктор Николаевич – д. т. н., профессор кафедры автоматизации производственных процессов, Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: sizykh_vn@mail.ru

Information about the authors

Aleksei V. Daneev – Doctor of Engineering Science, Professor of the Subdepartment of Information Systems and Information Protection, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: daneev@mail.ru

Roman A. Daneev – Associate Professor of the Subdepartment of Information and Legal Disciplines, East Siberian Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk, e-mail: romasun@mail.ru

Viktor N. Sizykh – Doctor of Engineering Science, Professor of the Subdepartment of Automation of Production Processes, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: sizykh_vn@mail.ru

DOI 10.26731/1813-9108.2020.2(66).150-157 **УДК** 656.2

Модель оптимизации работы городских логистических систем с учетом стратегии краткосрочного планирования

О. А. Лебедева✉
Ангарский государственный технический университет, г. Ангарск, Российская Федерация
✉ kravhome@mail.ru

Резюме

Городская логистика направлена на решение задач экономического и социального развития городских грузовых перевозок. Основная цель исследования заключается в изучении отдельных заинтересованных сторон и решения поставленной задачи как компонента интегрированной логистической системы. Это подразумевает координацию грузоотправителей, перевозчиков и маршрутов следования, а также объединение отправлений грузов нескольких клиентов и перевозчиков в одном и том же транспортном средстве. Городская логистика стремится оптимизировать системы городского транспорта. Общая цель планирования работы системы городской логистики – это эффективная эксплуатация системы при одновременном обеспечении спроса с минимально возможным воздействием на условия городского движения, что соответствует классической цели тактического планирования для систем грузовых перевозок с консолидацией. Статья направлена на решение задачи интегрированного краткосрочного планирования операций и управления ресурсами для общего случая, включающего двухуровневую структуру распределения. Общая цель исследования состоит в том, чтобы уменьшить влияние движения грузовых транспортных средств на условия жизни населения (снизить заторы и повысить мобильность) с минимизацией ущерба для городской социально-экономической деятельности. Более узкой целью является контроль за грузовыми транспортными средствами, работающими в городской черте, и сокращение их количества посредством повышения эффективности грузоперевозок и уменьшения порожних поездок. Общая математическая форму-