***УДК** 004.94: 621.01*
***DOI:** 10.26731/1813-9108.2017.3(55).17-22*

***Иртегов Валентин Дмитриевич**,*
д. ф.-м. н., с. н. с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки, «Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН»,
e-mail: irteg@icc.ru

***Титоренко Татьяна Николаевна**,*
к. т. н., с. н. с., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН»
e-mail: titor@icc.ru

V. D. Irtegov,
D. of Sci. in Physics and Mathematics, Senior Research Officer, Federal Government Budgetary Institution of Science, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
e-mail: irteg@icc.ru
T. N. Titorenko,
Ph.D. in Engineering, Senior Research Officer, Federal Government Budgetary Institution of Science, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
e-mail: titor@icc.ru

Информация о статье
Дата поступления: 2 августа 2017 г.

Article info
Received: August 2, 2017

О ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА НА МНОГООБРАЗИИ

ABOUT MOTIONS OF THE GYROSTAT ON A MANIFOLD

Аннотация. *Проводится качественный анализ уравнений движения гиростата в идеальной жидкости. Рассматривается движение гиростата на поверхности, определяемой нулевым уровнем интеграла площадей. Геометрия масс тела и начальные условия его движения соответствуют интегрируемому случаю Чаплыгина. Для уравнений движения гиростата, в рамках их качественного исследования, получены семейства стационарных решений. Элементам этих семейств в исходном фазовом пространстве соответствуют постоянные винтовые и поступательные движения тела. Показано, что найденные решения принадлежат инвариантным многообразиям коразмерности 2. Для стационарных решений получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову. Для стационарных инвариантных многообразий доказана устойчивость по части переменных.*
Ключевые слова: *стационарные решения, инвариантные многообразия, устойчивость, компьютерная алгебра.*
Abstract. *The qualitative analysis for the equations of motion of a gyrostat in ideal fluid is conducted in the article. The motion of the gyrostat on the surface defined by the zeroth level of area integral is considered. The mass geometry of the body and the initial conditions of its motion correspond to the Chaplygin integrable case. For the equations of motion of the gyrostat, in the framework of their qualitative analysis, the families of stationary solutions have been found. In the original phase space, the elements of these families correspond to permanent helical and translational motions of the body. It is shown that the found solutions belong to invariant manifolds of codimension 2. Lyapunov sufficient stability conditions have been obtained for the stationary solutions. Stability, with respect to a part of the phase variables, has been derived for the stationary invariant manifolds.*
Keywords: *stationary solutions, invariant manifolds, stability, computer algebra.*

Введение

Классические интегрируемые случаи в динамике твердого тела и их обобщения до сих пор служат источником идей для разрабатываемых методов анализа консервативных систем [1]. В свою очередь, применение новых методов и подходов позволяет получить интересные результаты в задачах, ставших классическими. В настоящей работе исследуется движение гиростата по инерции в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Распределение масс в теле и начальные условия его движения соответствуют интегрируемому случаю Чаплыгина [2]. Рассматривается обобщение этого случая, полученное в [3]. Там же указан дополнительный первый интеграл задачи. Топологический анализ фазового пространства волчка Чаплыгина в жидкости выполнен в [4]. В данной статье, в рамках качественного анализа уравнений движения гиростата, изучаются стационарные решения этих уравнений и их устойчивость. Под стационарными понимаются решения уравнений движения, на которых первые интегралы задачи (или их комбинации) принимают стационарное значение, что позволяет использовать указанные интегралы для получения функции Ляпунова при исследовании устойчивости таких решений. Для нахождения стационарных решений и их анализа применяется процедура Рауса - Ляпунова [5] и некоторые ее расширения [6], а также методы и средства компьютерной алгебры [7].

Постановка задачи

Для описания движения гиростата вводится инерциальная система координат и подвижная $Oxyz$, жестко связанная с несущим телом. Оси x, y, z направлены вдоль главных осей инерции тела. Ось ротора совпадает с осью Oz. Моменты инерции гиростата связаны соотношением $A = B = 2C$. Через M_1, M_2, M_3 и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

обозначим соответственно проекции вектора импульсивного момента и вектора импульсивной силы на оси системы $Oxyz$, $\lambda = const$ – гиростатический параметр. Уравнения движения гиростата в подвижной системе осей имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_1 = c\gamma_2\gamma_3 + (M_3 - \lambda)M_2, \\
&\dot{M}_2 = c\gamma_1\gamma_3 - (M_3 - \lambda)M_1, \\
&\dot{M}_3 = -2c\gamma_1\gamma_2, \\
&\dot{\gamma}_1 = (2M_3 - \lambda)\gamma_2 - M_2\gamma_3, \\
&\dot{\gamma}_2 = M_1\gamma_3 - (2M_3 - \lambda)\gamma_1, \\
&\dot{\gamma}_3 = M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2
\end{aligned} \tag{1}$$

и допускают следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned}
&2H = [M_1^2 + M_2^2 + 2(M_3 - \frac{\lambda}{2})^2] + c(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) = 2h, \\
&V_1 = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = 0, \\
&V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = c_1, \\
&V_3 = (M_1^2 - M_2^2 + c\gamma_3^2)^2 + 4M_1^2M_2^2 + 4\lambda[(M_1^2 \\
&\quad + M_2^2)M_3 - c\,(M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2)\gamma_3] \\
&\quad - 4\lambda^2(M_1^2 + M_2^2) = c_2
\end{aligned} \tag{2}$$

при условии, что постоянная интеграла V_1 равна нулю. Здесь c, h, c_1, c_2 – произвольные постоянные, V_3 – дополнительный интеграл, указанный в [3].

Рассмотрим задачу анализа системы (1) на многообразии, определяемом интегралом $V_1 = 0$. Интеграл V_1 с фиксированной постоянной используем для исключения одной переменной из дифференциальных уравнений (1) и первых интегралов (2). Тем самым понизим размерность задачи, не увеличивая числа параметров.

Исключим из уравнений (1) с помощью соотношения $V_1 = 0$ переменную M_3. Уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{M}_1 = c\gamma_2\gamma_3 - \rho_1 M_2,\ \dot{\gamma}_1 = -M_2\gamma_3 - \rho_2\gamma_2, \\
&\dot{M}_2 = c\gamma_1\gamma_3 + \rho_1 M_1,\ \dot{\gamma}_2 = M_1\gamma_3 + \rho_2\gamma_1, \\
&\qquad\qquad \dot{\gamma}_3 = M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Первые интегралы этих уравнений запишутся так:

$$\begin{aligned}
&2\tilde{H} = M_1^2 + M_2^2 + \rho_2^2 + c(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) = 2\tilde{h}, \\
&V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = c_1, \\
&\tilde{V}_3 = (M_1^2 - M_2^2 + c\gamma_3^2)^2 + 4M_1^2M_2^2 \\
&\quad - 4\lambda[\frac{(M_1^2 + M_2^2)(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2)}{\gamma_3} \\
&\quad + c(M_1\gamma_1 - M_2\gamma_2)\gamma_3] - 4\lambda^2(M_1^2 + M_2^2) = \tilde{c}_2,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\rho_1 = (\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \lambda\gamma_3)/\gamma_3$,
$\rho_2 = [2(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2) + \lambda\gamma_3]/\gamma_3$.

Для уравнений (3) поставим задачу получения стационарных решений и исследования их качественных свойств.

Выделение стационарных решений

Для нахождения указанного вида решений приравняем к нулю правые части дифференциальных уравнений (3) и построим для получившейся системы уравнений базис Гребнера [7] относительно части фазовых переменных $M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2$. Результатом будет система уравнений, распадающаяся на 3 подсистемы:

$$\begin{aligned}
I)\ &c\gamma_3^2(c\gamma_3^2 - \lambda^2) + M_1^2[(2c\gamma_3^2 + \lambda^2) + M_1^2] = 0, \\
&M_2 = 0, \\
&\gamma_2 = 0,\ c\gamma_3(2\lambda\gamma_1 + M_1\gamma_3) + M_1(M_1^2 + \lambda^2) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
II)\ &c\gamma_3^2(c\gamma_3^2 + \lambda^2) - M_2^2[(2c\gamma_3^2 - \lambda^2) - M_2^2] = 0, \\
&M_1 = 0, \\
&M_2[M_2^2 - (c\gamma_3^2 - \lambda^2)] - 2c\lambda\gamma_2\gamma_3 = 0,\ \gamma_1 = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$III)\ M_1 = 0, M_2 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0. \tag{7}$$

Прямым вычислением по определению инвариантного многообразия (ИМ) можно убедиться, что уравнения (5)-(7) определяют три одномерных ИМ уравнений движения (3). Векторное поле на каждом ИМ описывается уравнением $\dot{\gamma}_3 = 0$, которое имеет следующее семейство решений:

$$\gamma_3 = \gamma_3^0 = const. \tag{8}$$

Уравнения (5), (8) определяют 4 семейства решений уравнений движения (3):

$$\begin{aligned}
&M_1 = \pm\frac{s_1}{\sqrt{2}},\ M_2 = 0,\ \gamma_1 = \mp\frac{s_1\sigma_1}{4\sqrt{2}c\gamma_3^0},\ \gamma_2 = 0, \\
&\gamma_3 = \gamma_3^0;
\end{aligned} \tag{9}$$

$$M_1 = \pm\frac{s_2}{\sqrt{2}},\ M_2 = 0,\ \gamma_1 = \mp\frac{s_2\sigma_2}{4\sqrt{2}c\gamma_3^0},\ \gamma_2 = 0,\quad (10)$$
$$\gamma_3 = \gamma_3^0,$$

где γ_3^0 − параметр семейств, $s_1 = \sqrt{-2c\gamma_3^{0^2} - \lambda\sigma_2}$, $s_2 = \sqrt{-2c\gamma_3^{0^2} - \lambda\sigma_1}$, $\sigma_1 = \lambda - \sqrt{8c\gamma_3^{0^2} + \lambda^2}$, $\sigma_2 = \lambda + \sqrt{8c\gamma_3^{0^2} + \lambda^2}$.

Уравнения (6), (8) и (7), (8) определяют соответственно следующие семейства решений уравнений (3):

$$M_1 = 0,\ M_2 = \pm\frac{r_1}{\sqrt{2}},\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \pm\frac{r_1\rho_1}{4\sqrt{2}c\gamma_3^0},\quad (11)$$
$$\gamma_3 = \gamma_3^0;$$

$$M_1 = 0,\ M_2 = \pm\frac{r_2}{\sqrt{2}},\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \pm\frac{r_2\rho_2}{4\sqrt{2}c\gamma_3^0},\quad (12)$$
$$\gamma_3 = \gamma_3^0$$

и

$$M_1 = 0,\ M_2 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = \gamma_3^0. \quad (13)$$

Здесь $r_1 = \sqrt{2c\gamma_3^{0^2} - \lambda\rho_2}$, $r_2 = \sqrt{2c\gamma_3^{0^2} - \lambda\rho_1}$, $\rho_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 8c\gamma_3^{0^2}}$, $\rho_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 8c\gamma_3^{0^2}}$.

Все указанные решения уравнений (3) могут быть «подняты» в исходное фазовое пространство. Для этого к уравнениям, их определяющим, нужно добавить уравнение многообразия $V_1 = 0$.

С механической точки зрения, элементам семейств решений (9)-(12) в исходном фазовом пространстве соответствуют постоянные винтовые движения гиростата, а элементам семейства (13) − постоянные поступательные движения. Вращения гиростата происходят относительно оси, расположенной в плоскости Oxz (в случае семейств (9), (10)) и Oyz (в случае семейств (11), (12)).

Покажем, что найденные решения стационарные. Рассмотрим вначале семейства решений (9).

Пусть

$$2K = 2\mu_0\tilde{H} - \mu_2 V_2 - \mu_3\tilde{V}_3, \quad (14)$$

где $\mu_i\ (i = 0,2,3)$ − параметры семейства интегралов K.

Запишем необходимые условия экстремума K по фазовым переменным:

$$\frac{\partial K}{\partial M_1} = 0, \frac{\partial K}{\partial M_2} = 0, \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (i = 1,2,3). \quad (15)$$

Из уравнений (15) найдем ограничение на μ_3, при котором решения (9) удовлетворяют этим уравнениям:

$$\mu_3 = -\frac{2\gamma_3^{0^2}(c\mu_0 + \mu_2) + \mu_0\lambda\sigma_2}{2\lambda^2(4c\gamma_3^{0^2} + \lambda\sigma_2)}.$$

Подставив μ_3 в (14), получим следующее семейство интегралов:

$$2K_1 = 2\mu_0\left(\tilde{H} + \frac{(4c\gamma_3^{0^2} - \lambda\sigma_1)\tilde{V}_3}{32c\lambda^2\gamma_3^{0^2}}\right) + \mu_2\left(\frac{\gamma_3^{0^2}\tilde{V}_3}{\lambda^2(4c\gamma_3^{0^2} + \lambda\sigma_2)} - V_2\right), \quad (16)$$

K_1 разделяется на два подсемейства интегралов, которые соответствуют коэффициентам при μ_0, μ_2. Элементы семейства K_1 и его подсемейств принимают стационарные значения на элементах семейств (9), что проверяется прямым вычислением. Таким образом, рассматриваемые решения являются стационарными. Семейство интегралов K_1 и его подсемейства − по отдельности или их комбинации − можно использовать для построения функции Ляпунова при исследовании на устойчивость элементов семейств решений (9). Соответствующие семейства интегралов для решений (10)-(12) по структуре совпадают с K_1. Ниже приводится семейство интегралов, элементы которого принимают стационарные значения на элементах семейства решений (13):

$$2K_2 = 2\mu_0\tilde{H} + \mu_3(2c^2\gamma_3^{0^2}V_2 - \tilde{V}_3). \quad (17)$$

Об инвариантных многообразиях коразмерности 2

Покажем, что найденные стационарные решения принадлежат ИМ коразмерности 2 уравнений движения (3). Эти ИМ получим из уравнений стационарности (15), решая их относительно части фазовых переменных и части параметров μ_i [6].

Построим для системы (15) базис Гребнера, полагая неизвестными часть фазовых переменных и параметров: $\mu_0, \mu_2, \mu_3, M_1, M_2$. Результатом будет система уравнений, распадающаяся на несколько подсистем.

Подсистема 1:

$$c\mu_0 - \mu_2 = 0,\ \mu_0 + 2\lambda^2\mu_3 = 0, \quad (18)$$

$$\lambda\gamma_2 - M_2\gamma_3 = 0, (M_2^2 - M_1^2 - c\gamma_3^2 + \lambda^2)\gamma_3 + 2\lambda M_1\gamma_1 = 0. \quad (19)$$

Подсистема 2:

$$c\mu_0 - \mu_2 = 0, 4c\lambda\gamma_3^2\mu_3 + (\lambda + \sqrt{4c\gamma_2^2 + \lambda^2})\mu_0 = 0, \quad (20)$$

$$2M_2\gamma_2 + \gamma_3(\lambda - \sqrt{4c\gamma_2^2 + \lambda^2}) = 0, M_1 = 0. \quad (21)$$

Подсистема 3:

$$c\mu_0 - \mu_2 = 0, 4c\lambda\gamma_3^2\mu_3 + (\lambda - \sqrt{4c\gamma_2^2 + \lambda^2})\mu_0 = 0, \quad 2M_2\gamma_2 + \gamma_3(\lambda + \sqrt{4c\gamma_2^2 + \lambda^2}) = 0, M_1 = 0. \quad (22)$$

Подсистема 4:

$$c\mu_0 + \mu_2 = 0, \mu_0 + 2\lambda^2\mu_3 = 0, \quad (23)$$

$$\lambda\gamma_1 - M_1\gamma_3 = 0, (M_2^2 - M_1^2 - c\gamma_3^2 - \lambda^2)\gamma_3 - 2\lambda M_2\gamma_2 = 0. \quad (24)$$

Подсистема 5:

$$c\mu_0 + \mu_2 = 0, 4c\lambda\gamma_3^2\mu_3 - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4c\gamma_1^2})\mu_0 = 0, \quad 2M_1\gamma_1 + \gamma_3(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4c\gamma_1^2}) = 0, M_2 = 0. \quad (25)$$

Подсистема 6:

$$c\mu_0 + \mu_2 = 0, 4c\lambda\gamma_3^2\mu_3 + (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4c\gamma_1^2})\mu_0 = 0, \quad (26)$$

$$2M_1\gamma_1 + \gamma_3(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4c\gamma_1^2}) = 0, M_2 = 0. \quad (27)$$

Нетрудно проверить по определению ИМ, что последние два уравнения каждой подсистемы определяют ИМ коразмерности 2 дифференциальных уравнений (3). Первые два уравнения каждой подсистемы позволяют получить первые интегралы векторных полей на этих ИМ.

Далее разрешим уравнения (5) относительно переменных $M_1, M_2, \gamma_1, \gamma_2$ и подставим полученные выражения в уравнения найденных ИМ. Из них уравнения (19) обратятся в тождество. Откуда следует, что ИМ, определяемое уравнениями (5), является подмногообразием ИМ (19).

Аналогично можно показать, что ИМ, определяемое уравнениями (6), является подмногообразием ИМ (24), а ИМ (7) принадлежит пересечению ИМ (21) и ИМ (27).

Об устойчивости стационарных решений

Исследуем устойчивость найденных выше решений 2-м методом Ляпунова, используя соответствующие интегралы для построения функций Ляпунова.

Начнем с 1-го семейства решений (9). Введем отклонения от невозмущенного решения:

$$y_1 = \gamma_1 + \frac{s_1\sigma_1}{4\sqrt{2}c\gamma_3^0}, y_2 = \gamma_2, y_3 = M_1 - \frac{s_1}{\sqrt{2}}, y_4 = M_2.$$

Здесь и далее используются обозначения, введенные выше.

Вторая вариация интеграла K_1 (16) в окрестности элементов исследуемого семейства решений в отклонениях $y_j (j = 1,\ldots,4)$ на линейном многообразии

$$\delta\widetilde{H} = -\sqrt{2}s_1(2\lambda + \sigma_2)y_1 = 0, \quad \delta V_2 = -\sqrt{2}s_1\sigma_1 y_1 = 0, \quad \delta\widetilde{V}_3 = \sqrt{2}\lambda^2 s_1\sigma_2 y_1 = 0$$

имеет вид $\delta^2 K_1 = Q_1 + Q_2$, где

$$Q_1 = (c\mu_0 + \mu_2)\left(\frac{\gamma_3^0}{\lambda}y_2y_4 - \frac{1}{2}y_2^2\right) - \frac{\gamma_3^{0^2}[(2c\gamma_3^{0^2} + \lambda^2)(c\mu_0 + \mu_2) - \mu_0 c\lambda\sigma_1]y_4^2}{\lambda^2(4c\gamma_3^{0^2} + \lambda\sigma_2)},$$

$$Q_2 = -\frac{\gamma_3^{0^2}[(2c\gamma_3^{0^2} - \lambda^2)(c\mu_0 + \mu_2) + \mu_0 c\lambda\sigma_2]y_3^2}{\lambda^2(4c\gamma_3^{0^2} + \lambda\sigma_2)}.$$

Условия положительной определенности квадратичной формы $\delta^2 K_1$ являются достаточными для устойчивости элементов исследуемого семейства решений. В форме неравенств Сильвестра они записываются так:

$$-(c\mu_0 + \mu_2) > 0, \quad -\frac{\gamma_3^{0^2}(c^2\mu_0^2 - \mu_2^2)\sigma_1}{\lambda(4c\gamma_3^{0^2} + \lambda\sigma_2)} > 0,$$

$$-\frac{\gamma_3^{0^2}[(2c\gamma_3^{0^2} - \lambda^2)(c\mu_0 + \mu_2) + \mu_0 c\lambda\sigma_2]}{\lambda^2(4c\gamma_3^{0^2} + \lambda\sigma_2)} > 0.$$

С учетом условий вещественности рассматриваемых решений ($\lambda < 0, \gamma_3^0 \neq 0$ и $0 < c < \lambda^2/\gamma_3^{0^2}$), последние неравенства совместны при следующих ограничениях на параметры $\lambda, c, \gamma_3^0, \mu_0, \mu_2$:

$$\mu_0 > 0, \mu_2 < -c\mu_0, \lambda < 0, \gamma_3^0 \neq 0 \text{ и } \frac{\lambda^2}{2\gamma_3^{0^2}} \leq c < \frac{\lambda^2}{\gamma_3^{0^2}}. \quad (28)$$

Отметим, что полученные достаточные условия устойчивости накладывают ограничения не только на параметры задачи, но и параметры μ_0, μ_0 семейства интегралов K_1. Таким образом, для уравнений возмущенного движения, записанных в окрестности исследуемого решения, выделено подсемейство знакоопределенных интегралов. Эти интегралы позволяют получить одинаковые достаточные условия устойчивости для рассматриваемого решения.

Условия (28) будут также достаточными и для устойчивости элементов 2-го семейства решений (9), если для получения функции Ляпунова снова использовать интеграл K_1.

Достаточные условия устойчивости для элементов семейств решений (10)-(13) подобны (28). Ниже приведены условия устойчивости элементов семейства постоянных поступательных движений (13).

$$\mu_3 > 0, \gamma_3^0 \neq 0, \lambda \neq 0 \text{ и } ((0 < c < \frac{\lambda^2}{\gamma_3^{0^2}}$$

$$\text{и } -2c\gamma_3^{0^2}\mu_3 < \mu_0 < 2c\gamma_3^{0^2}\mu_3)$$

$$\text{или } (-\frac{\lambda^2}{\gamma_3^{0^2}} < c < 0 \text{ и } 2c\gamma_3^{0^2}\mu_3 < \mu_0 < -2c\gamma_3^{0^2}\mu_3)).$$

В этом случае интеграл K_2 (17) использовался для построения функции Ляпунова.

Об устойчивости инвариантных многообразий

Интегралы $2\hat{K} = 2\widetilde{H} \mp cV_2 + \widetilde{V}_3/(2\lambda^2)$ принимают стационарные значения соответственно на ИМ (19) и ИМ (21). Таким образом, эти интегралы можно использовать для получения функций Ляпунова при исследовании устойчивости данных ИМ.

Для уравнений возмущенного движения интеграл $2\hat{K} = 2\widetilde{H} - cV_2 + \widetilde{V}_3/(2\lambda^2)$ в окрестности ИМ (19) записывается так: $2\Delta\hat{K} = -cy_2^2 + z^2$, где y_1, y_2 – отклонения от исследуемого ИМ, $z = (M_1 y_1 + M_2 y_2)/\gamma_3$.

Так как квадратичная форма $\Delta\hat{K}$ знакоопределена по входящим в нее переменным при $c < 0$, то исследуемое ИМ устойчиво при условии $c < 0$ по переменным $\gamma_2 - \gamma_3 M_2/\lambda$, $(M_2(\lambda\gamma_2 - \gamma_3 M_2)/\lambda + M_1(2\lambda M_1\gamma_1 + \gamma_3(M_2^2 - M_1^2 - c\gamma_3^2 + \lambda^2))/(2\lambda M_1))\gamma_3^{-1}$. Аналогично доказывается устойчивость по части переменных ИМ (21).

Заключение

В задаче о движении тела в идеальной жидкости в обобщенном интегрируемом случае Чаплыгина найдены семейства постоянных винтовых и поступательных движений тела. Показано, что ограничения этих движений на инвариантное многообразие, определяемое интегралом $V_1 = 0$, принадлежат ИМ коразмерности 2. Для элементов семейств постоянных винтовых и поступательных движений уравнений (3), а также стационарных ИМ получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову.

Работа частично поддержана Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-8081.2016.9) и грантом РФФИ (грант 16-07-00201а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Оден М. Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем. Ижевск : ИД Удмуртский университет, 1999. 2015 с.
2. Чаплыгин С.А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. 1903. Т. 11. Вып. 2. С. 7–10.
3. Yehia H.M. New generalizations of the integrable problems in rigid body dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30, № 20. P. 7269–7275.
4. Николаенко С.С. Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 2. С.75–122.
5. Ляпунов А.М. О постоянных винтовых движениях тела в жидкости. М. : АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.
6. Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Об инвариантных многообразиях систем с первыми интегралами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 4. С.531–537.
7. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М. : Мир, 2000. 687 с.

REFERENCES

1. Oden M. Vrashchayushchiesya volchki: kurs integriruemykh sistem [Spinning tops: a course of integrable systems]. Izhevsk: Udmurtskii universitet Publ., 1999, 2015 p.
2. Chaplygin S.A. Novoe chastnoe reshenie zadachi o dvizhenii tverdogo tela v zhidkosti [A new particular solution of the problem of the motion of a rigid body in a fluid]. *Tr. otd. fiz. nauk o-va lyubitelei estestvoznaniya [Proceedings of the Department of Physical Sciences of the Society of Naturalists]*, 1903, Vol. 11. No. 2, pp. 7–10.
3. Yehia H.M. New generalizations of the integrable problems in rigid body dynamics. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1997. Vol. 30, No. 20. pp. 7269–7275.

4. Nikolaenko S.S. Topologicheskaya klassifikatsiya sistem Chaplygina v dinamike tverdogo tela v zhidkosti [Topological classification of Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid]. *Matem. sb* [*Collection in Mathematics*], 2014, Vol. 205, No. 2. pp.75–122.

5. Lyapunov A.M. O postoyannykh vintovykh dvizheniyakh tela v zhidkosti [On the permanent helical movements of the body in a liquid]. Moscow: AN SSSR Publ., 1954. Vol. 1, pp. 276–319.

6. Irtegov V.D., Titorenko T.N. Ob invariantnykh mnogoobraziyakh sistem s pervymi integralami [On invariant manifolds of systems with first integrals]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Applied Mathematics and Mechanics*], 2009, Vol. 73, No. 4. pp. 531–537.

7. Cox, D., Little, J., O'Shea, D. Ideals, Varieties, and Algorithms. Springer Berlin Heidelberg, 1997, 538 p. (Russ.ed.: Koks D., Littl Dzh., O'Shi D. Idealy, mnogoobraziya i algoritmy. Moscow: Mir Publ, 2000. 687 p.)

УДК *519.61* ***DOI:*** *10.26731/1813-9108.2017.3(55).22-30*

Новиков Михаил Алексеевич,
д. ф.-м. н., с. н. с., Учреждение Российской Академии наук,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
e-mail: nma@icc.ru

M. A. Novykov,
Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Senior Research Officer,
Institution of the Russian Academy of Sciences,
Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
e-mail: nma@icc.ru

Информация о статье
Дата поступления: 10 авгутса 2017 г.

Article info
Received: August 10, 2017

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

ON POSITIVE SOLUTIONS OF A NONHOMOGENEOUS SYSTEM OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS WITH A POSITIVE RIGHT-HAND SIDE

Аннотация. *В статье обсуждается возможность существования решений с положительными элементами неоднородной системы линейных алгебраических уравнений с заданной квадратной матрицей и неопределенной правой частью уравнений при предположении их положительных значений. Исследование проведено на матрицах второго и третьего порядков. Предложены два способа нахождения решений: аналитический и матричный. Первый способ создан для получения решений системы неравенств. Его основу составляют элементарные преобразования, в результате которых исключается часть переменных из системы неравенств, упрощая анализ решения вопроса существования решений для системы неравенств. Для него составлена последовательность проведения вычислительных операций по исследованию решений системы линейных алгебраических неравенств: получение решений или установление невозможности их существования; приведен алгебраический критерий, выражающий необходимые условия существования решений системы неравенств.*

Второй матричный способ опирается на основные матричные свойства: собственные значения матриц и собственные векторы матрицы А. Показано, что достаточные условия существования положительных решений исходной системы линейных алгебраических уравнений основаны на положительных собственных значениях матрицы А и соответствующих им собственных векторах правостороннего преобразования подобия, приводящего матрицу А к нормальной форме Жордана. При этом допускаются кратные корни с непростыми элементарными делителями. Аналогичные свойства установлены для комплексных собственных значений с положительной вещественной частью.

Достаточные условия отсутствия вещественных решений системы линейных алгебраических уравнений выявляются при отрицательных собственных значениях матрицы А и соответствующих им собственных векторах левостороннего преобразования подобия, приводящего матрицу А к нормальной форме Жордана. Подобные свойства проявляются и для комплексных собственных значений с отрицательной вещественной частью.

Для матриц третьего порядка необходимые и достаточные условия невозможности существования вещественных решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений выражаются знакоопределенностью связки специальным образом составленных трех квадратичных форм от шести переменных, имеющих вид полных квадратов. В таком же контексте необходимые и достаточные условия существования вещественных решений неоднородной системы линейных алгебраических уравнений формулируются знакопеременностью связки трех упомянутых квадратичных форм.

Ключевые слова: *матрица, характеристическое уравнение, собственное значение, собственный вектор.*

Abstract. *The paper discusses the possibility of obtaining solutions with positive elements for a nonhomogeneous system of linear algebraic equations with a given quadratic matrix A and with an indefinite right-hand side under the assumption of positivity of their values. The investigation has been conducted on second and third order matrices. The two techniques of obtaining solutions have been proposed: the analytical technique and matrix technique.*

The first technique has been developed for obtaining solutions of a system of inequalities. Its basis is comprised of elementary transformations, as a result of which some part of variables is removed from the system of inequalities, while simplifying analysis bound up with resolving the issue of existence of solutions for the system of inequalities. An algebraic criterion, which expresses necessary conditions of existence of solutions for the system of inequalities, has been proposed for this technique.

The second technique is based on principal properties of matrices: eigenvalues of matrices and eigenvectors. Sufficient conditions of existence of real solutions for the initial system of equations and sufficient conditions of impossibility of existence of such solutions have been obtained for this technique.

Keywords: *matrix, characteristic equation, eigenvalue, eigenvector.*