



REFERENCES

1. Deich A.M. Metody identifikatsii dinamicheskikh ob"ektov [Methods for identifying dynamic objects]. Moscow: Energiya Publ., 1979, 240 p.
2. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 430 p.
3. Gel'fand I.M., Fomin S.V. Variatsionnoe ischislenie [The calculus of variations]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 228 p.
4. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. 7th ed., Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 572 p.
5. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsional'nyi analiz [Functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 744 p.
6. Banakh S. Teoriya lineinykh operatsii [The theory of linear operations]. Izhevsk: R&C Dynamics Publ., 2001, 272 p.
7. Krasovskii N.N. Teoriya upravleniya dvizheniem [Motion Control Theory]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
8. Kneller D. V. Razrabotka metodov identifikatsii i upravleniya na osnove apparata problemy momentov: dis. ... kand. tekhn. nauk : 05.13.01. - Sistemnyi analiz, upravlenie i obrabotka informatsii (po otraslyam) [Development of methods of identification and control based on the apparatus of the problem of moments: Ph.D. (Engineering) thesis: 05.13.01. - System analysis, management and processing of information (by industry)]. Moscow, 1993, 211 p.
9. Zade L., Dezoer Ch. Teoriya lineinykh sistem. Metod prostranstva sostoyanii [The theory of linear systems. State space method]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 704 p.
10. Dmitriev A.V., Druzhinin E.I. K teorii nelineinykh kraevykh zadach upravlyaemykh sistem – V kn.: Differentsial'nye uravneniya i chislennyye metody [On the theory of nonlinear boundary value problems of controllable systems – In the book: Differential equations and numerical methods]. Novosibirsk: Nauka. Sib. Otdelenie Publ., 1986, pp. 179–87.
11. Bellman R., Kalaba R. Kvazilinearizatsiya i nelineinye kraevye zadachi [Quasilinearization and nonlinear boundary value problems]. Moscow: Mir, 1968, 186 p.
12. Moiseev N. N. Elementy teorii optimal'nykh sistem [Elements of the theory of optimal systems]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 526 p.
13. Pontryagin L. S. Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya [Differential equations and their applications]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 208 p.
14. Gudkov V. V., Klokov Yu. A., Lepin A. Ya., Ponomarev V. D. Dvukhtocheynye kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Two-point boundary value problems for ordinary differential equations]. Riga: Latvian state university Publ., 1973, 135 p.
15. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris, Dunod, 1969 (Russ. ed.: Lions Zh. L. Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach. Moscow: Mir Publ., 1972, 588 p.).

Информация об авторах

Юрий Иннокентьевич Огородников - к. т. н., Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск, e-mail: ogor23@yandex.ru

Authors

Yuri Innokentievich Ogorodnikov – Ph.D. in Engineering Science, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, e-mail: ogor23@yandex.ru

Для цитирования

Огородников Ю. И. Задача параметрической идентификации моделей управляемых динамических систем как проблема моментов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - 2017. - Т. 56, № 4. - С. 33–40. - DOI: 10.26731/1813-9108.2017.4(56).33-40.

For citation

Ogorodnikov Yu. N. Zadacha parametricheskoi identifikatsii modeli upravlyaemykh dinamicheskikh sistem kak problema momentov [The problem of parametric identification of models of controllable dynamic systems as a problem of moments]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2017. Vol. 56, No.4, pp. 33–40. DOI: 10.26731/1813-9108.2017.4(56).33-40.

УДК 519.688

DOI: 10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48

В. Е. Зотеев, Р. Ю. Макаров

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
Дата поступления: 26 октября 2017 г.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЕРВОЙ СТАДИИ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Аннотация. Явление ползучести требует особого учета при проектировании элементов конструкций. Оценка параметров моделей ползучести остается важной научно-технической задачей, однако существующие численные методы оценивания параметров нелинейных моделей обладают рядом недостатков, вследствие чего возникает потребность в развитии новых методов. Разрабатывается новый численный метод для определения параметров модели первой стадии деформации ползучести. Построена обобщенная регрессионная модель, которая в форме разностного уравнения выражает связь между последовательными значениями деформации ползучести. Получены зависимости, выражающие связь между коэффициентами обобщенной регрессионной модели и параметрами модели ползучести. Разработана и описана итерационная процедура среднеквадратического оценивания и уточнения коэффициентов обобщенной регрессионной модели. Выполнена экспериментальная проверка полученных результатов при обработке экспериментальных кривых ползучести поливинилхлоридного пластика.



Показана хорошая согласованность расчетных и экспериментальных данных. Построены доверительные интервалы для результатов вычислений на основе построенной модели. Таким образом, разработан новый численный метод определения параметров модели первой стадии деформации ползучести.

Ключевые слова: деформация ползучести, регрессионная модель, среднеквадратическое оценивание, нелинейная регрессия.

V. E. Zoteev, R. Yu. Makarov

Samara State Technical University, Samara, the Russian Federation

Received: October 26, 2017

NUMERICAL METHOD OF DETERMINING THE PARAMETERS OF THE FIRST STAGE OF CREEP STRAIN

Abstract. The phenomenon of creep needs to be taken into account in the design of structural elements. The estimation of parameters of the creep models is an important scientific problem, and the known numerical methods have a number of disadvantages. As a consequence, the development of new numerical method for estimation of parameters of creep models is an actual issue. The linear regression model of creep has been constructed, together with the dependencies between parameters of the creep model and coefficients of the linear regression model. The iterative procedure of the RMS estimation of the regression model coefficients is developed and described. The developed numerical method has been applied in the experimental processing of the creep data, and the results show high efficiency of the numerical method.

Keywords: a creep strain, a regression model, RMS estimation, a non-linear regression.

Введение

Явление ползучести требует особого учета при проектировании элементов конструкций, особенно если предполагается их эксплуатация в условиях высоких температур и напряжений [8]. Оценивание параметров нелинейных математических моделей ползучести является важнейшей научно-технической задачей. Однако существующие методы параметрической идентификации обладают рядом существенных недостатков. К ним относятся: отсутствие в алгоритме метода статистической обработки результатов наблюдений [11] (метод последовательного выделения экспонент [13]); медленная сходимость итерационных процедур, а в ряде случаев даже её отсутствие (метод Левенберга - Марквардта, метод Ньютона [2, 3]); проблема выбора начального приближения при решении систем нелинейных уравнений (нелинейный метод наименьших квадратов [1, 9, 14]). Реалии современного мира, с все более ужесточающейся конкуренцией, тенденцией бережливого производства, стремлением к наиболее полному использованию механических свойств и ресурса материалов, требуют дальнейшего развития и совершенствования численных методов анализа напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. В данной работе предлагается новый численный метод определения параметров модели ползучести. В основе метода лежит переход от исходной нелинейной математической модели к обобщенной линейной регрессионной модели, в форме разностного уравнения описывающей зависимость между последовательными экспериментальными значениями деформации

ползучести и учитывающей при вычислениях влияние случайного разброса в экспериментальных данных. В процессе осуществления такого перехода выводятся соотношения между параметрами исходной нелинейной модели и коэффициентами регрессионной модели, по которым вычисляются оценки искомых параметров. Данный подход был апробирован в ряде работ [5, 6], и показал свою высокую эффективность.

Определяющее уравнение

В соответствии с математической моделью ползучести [9], зависимость деформации ползучести от времени и напряжения для первой стадии ползучести имеет вид:

$$\hat{p}(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma_{0j}^m, \quad j = \overline{1, M}, \quad (1)$$

где p – деформация ползучести; t – время; σ_0 – номинальное напряжение ($\sigma_0 \geq 0$); c_k , α_k , m – параметры материала; s – количество экспоненциальных слагаемых, и, как показывает практика, величина s обычно равна 2, иногда 3; M – количество кривых ползучести в серии экспериментов.

Переход от нелинейной зависимости к обобщенной регрессионной модели

Рассмотрим модель (1) для случая двух экспоненциальных слагаемых:

$$\hat{p}(t, \sigma_{0j}) = [c_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2 (1 - e^{-\alpha_2 t})] \sigma_{0j}^m. \quad (2)$$

Используя равномерную выборку по времени, с шагом дискретизации τ , получаем дискретный аналог (2):

$$\hat{p}_{k,j} = \hat{y}_k \sigma_{0j}^m, \quad j = \overline{1, M}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (3)$$



где

$$\hat{y}_k = c_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau k}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 \tau k}), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (4)$$

N – объем выборки результатов наблюдений.

Подставляя в выражение (4) вместо k значения $k-1$ и $k-2$, получаем систему уравнений, линейную относительно функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$, $i = \overline{1, 2}$:

$$\begin{cases} \hat{y}_{k-1} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-1} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-1} \\ \hat{y}_{k-2} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-2} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-2}, \end{cases} \quad (5)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = \overline{1, 2}$. Решая данную систему, линейную относительно неизвестных функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$, $i = \overline{1, 2}$, и подставляя результат в исходное соотношение (4), получаем:

$\hat{y}_k = (\mu_1 + \mu_2)\hat{y}_{k-1} - \mu_1 \mu_2 \hat{y}_{k-2} + c_s(\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1)$, или

$$\hat{p}_k = \lambda_1 \hat{p}_{k-1} + \lambda_2 \hat{p}_{k-2} + \lambda_3, \quad (6)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = -\mu_1 \mu_2$,

$$\lambda_3 = c_s(\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1) = c_s(1 - \lambda_1 - \lambda_2).$$

С учетом (3) имеем соотношение

$\tilde{p}_k = \frac{\hat{p}_{k,j}}{\sigma_{0,j}^m}$, $j = \overline{1, M}$, $k = \overline{0, N-1}$, с учетом которого

из (6) получаем $\frac{\hat{p}_{k,j}}{\sigma_{0,j}^m} = \lambda_1 \frac{\hat{p}_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^m} + \lambda_2 \frac{\hat{p}_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^m} + \lambda_3$,

$k = \overline{2, N-1}$, $j = \overline{1, M}$. При $k = 0$ и $k = 1$, из (3) и (4) соответственно имеем $\hat{p}_{0,j} = 0$,

$\frac{\hat{p}_{1,j}}{\sigma_{0,j}^m} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau}$, $j = \overline{1, M}$. Таким образом,

получили систему разностных уравнений, описывающую последовательные значения деформации ползучести в зависимости от номинального напряжения $\sigma_{0,j}$:

$$\begin{cases} \hat{p}_{0,j} = 0; \\ \frac{\hat{p}_{1,j}}{\sigma_{0,j}^m} = \lambda_4; \\ \frac{\hat{p}_{k,j}}{\sigma_{0,j}^m} = \lambda_1 \frac{\hat{p}_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^m} + \lambda_2 \frac{\hat{p}_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^m} + \lambda_3, \end{cases} \quad (7)$$

$k = \overline{2, N-1}$, $j = \overline{1, M}$,

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \exp(-\alpha_1 \tau) + \exp(-\alpha_2 \tau), \\ \lambda_2 &= -\exp[-(\alpha_1 + \alpha_2) \tau], \quad \lambda_3 = c_s(1 - \lambda_1 - \lambda_2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\lambda_4 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau}, \quad c_s = \sum_{i=1}^2 c_i.$$

Принимая во внимание случайный разброс в результатах наблюдений $\varepsilon_{k,j}$, экспериментальные значения деформации ползучести $p_{k,j}$ можно представить в виде:

$$p_{k,j} = \hat{p}_{k,j} + \varepsilon_{k,j}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (9)$$

Подставляя выражение (9) в систему (7), получаем модель, которая в форме разностных уравнений описывает последовательные результаты наблюдений деформации ползучести при различных значениях номинального напряжения в пределах первой стадии:

$$\begin{cases} p_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0,j}^m} = \lambda_4 + \frac{\varepsilon_{1,j}}{\sigma_{0,j}^m}, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0,j}^m} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^m} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^m} + \lambda_3 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^m} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^m} \varepsilon_{k-2,j} + \frac{1}{\sigma_{0,j}^m} \varepsilon_{k,j}, \end{cases} \quad (10)$$

$k = \overline{2, N-1}$, $j = \overline{1, M}$.

Так как в разностные уравнения входит параметр m , процедуру вычисления оценок параметров модели ползучести необходимо начать с вычисления оценки \hat{m} .

В основе алгоритма оценивания параметра m лежит логарифмирование (3).

С учетом естественного разброса данных имеем

$$p_{k,j} = \tilde{p}_k \sigma_{0,j}^m + \varepsilon_{k,j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Из выражения (11) после логарифмирования получаем:

$$\ln(p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}) = \ln \hat{y}_k + m \ln \sigma_{0,j}, \quad j = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\ln \frac{p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}}{p_{k,j-1} - \varepsilon_{k,j-1}} = m \ln \frac{\sigma_{0,j}}{\sigma_{0,j-1}}, \quad (12)$$

$$j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Линеаризуя выражение (12) по переменным $\varepsilon_{k,j}$ и $\varepsilon_{k,j-1}$ и ограничиваясь членами первого порядка, получаем соотношения

$$\ln(p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}) \approx \ln p_{k,j} - \frac{\varepsilon_{k,j}}{p_{k,j}}, \quad j = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\ln \left(\frac{p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}}{p_{k,j-1} - \varepsilon_{k,j-1}} \right) \approx \ln \left(\frac{p_{k,j}}{p_{k,j-1}} \right) - \frac{1}{p_{k,j}} \varepsilon_{k,j} + \frac{1}{p_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1},$$

$$j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

подставляя которые в (12), получаем:

$$\ln p_{k,1} = \ln \hat{y}_k + m \ln \sigma_{01} + \frac{1}{p_{k,1}} \varepsilon_{k,1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\ln \frac{p_{k,j}}{p_{k,j-1}} = m \ln \frac{\sigma_{0j}}{\sigma_{0j-1}} + \frac{1}{p_{k,j}} \varepsilon_{k,j} - \frac{1}{p_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1}, \quad (13)$$

$$j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

На основе соотношений (13) формируется регрессионная модель. Введем обозначения: $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]^T$ – N -мерный вектор коэффициентов регрессионной модели:

$$\lambda_1 = \hat{y}_1, \quad \lambda_2 = \hat{y}_2, \dots, \lambda_{N-1} = \hat{y}_{N-1}, \quad \lambda_N = m; \quad (14)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \text{ – вектор правой части, имеющий размер } (N-1) \times M, \text{ который состоит из } M \text{ векторов:}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} \ln p_{1,1} \\ \ln p_{2,1} \\ \vdots \\ \ln p_{N-1,1} \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} \ln \frac{p_{1,j}}{p_{1,j-1}} \\ \ln \frac{p_{2,j}}{p_{2,j-1}} \\ \vdots \\ \ln \frac{p_{N-1,j}}{p_{N-1,j-1}} \end{bmatrix}, \quad j = 2, \dots, M;$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} \text{ – матрица размера } [(N-1)M \times N], \text{ в}$$

которую входят M матриц F_j , имеющих размер $[(N-1) \times N]$ и вид

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln \sigma_{01} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \ln \sigma_{01} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \ln \sigma_{01} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \ln \sigma_{01} \end{bmatrix},$$

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln \frac{\sigma_{0j}}{\sigma_{0j-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln \frac{\sigma_{0j}}{\sigma_{0j-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln \frac{\sigma_{0j}}{\sigma_{0j-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln \frac{\sigma_{0j}}{\sigma_{0j-1}} \end{bmatrix}, \quad j = 2, \dots, M;$$

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – вектор случайного разброса экспериментальных данных, имеющий размер $[(N-1) \times M \times 1]$, в который входят M векторов ε_j , имеющих размер $[(N-1) \times 1]$:

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \varepsilon_{3,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – вектор «невязки», имеющий размер $[(N-1)M \times 1]$, в который входят M векторов η_j , имеющих размер $[(N-1) \times 1]$:

$$\eta_j = [\eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T, \text{ элементы которых}$$

$$\text{имеют вид: } \eta_{k,1} = \frac{1}{p_{k,1}} \varepsilon_{k,1}, \quad k = \overline{1, N-1},$$

$$\eta_{k,j} = \frac{1}{p_{k,j}} \varepsilon_{k,j} + \frac{1}{p_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1}, \quad j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1};$$

G – матрица линейного преобразования вектора остатков, имеющая размер $[(N-1)M \times (N-1)M]$, диагональные элементы которой описываются выражением:

$$g_{ii} = \frac{1}{p_{i,j}}, \quad j = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N-1};$$

поддиагональные элементы:

$$g_{i,j-1} = -\frac{1}{p_{i,j-1}}, \quad j = \overline{2, M}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Учитывая введенные векторы и матрицы, получаем регрессионную модель

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = G\varepsilon, \end{cases} \quad (15)$$

оценка коэффициентов которой находится по формуле:

$$\hat{\lambda} = [F^T (G^{-1})^T G^{-1} F]^{-1} F^T (G^{-1})^T G^{-1} b, \quad (16)$$

При этом оценка параметра m вычисляется так:

$$\hat{m} = \hat{\lambda}_{N-1}. \quad (17)$$



Далее с учетом найденной оценки параметра m формируется обобщенная регрессионная модель, в основе которой лежат уравнения (10). Введем обозначения: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов регрессионной модели, элементы которого связаны с параметрами ползу-

части соотношениями (8); $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ – вектор раз-

мера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, который состоит из M векторов

b_j размера $[N_j \times 1]$ вида:

$$b_j = \begin{bmatrix} p_{0,j} \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^m} \\ \frac{p_{2,j}}{\sigma_{0j}^m} \\ \frac{p_{3,j}}{\sigma_{0j}^m} \\ \vdots \\ \frac{p_{N_j-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} \text{ – матрица}$$

размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 4 \right]$, в которую входят M матриц

F_j имеющих размер $[N_j \times 4]$ и вид

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^m} & \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0j}^m} & 1 & 0 \\ \frac{p_{2,j}}{\sigma_{0j}^m} & \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^m} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{p_{N_j-2,j}}{\sigma_{0j}^m} & \frac{p_{N_j-3,j}}{\sigma_{0j}^m} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – вектор естественного разброса экспериментальных данных, имеющий размер $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, в который входят M векторов

ε_j размера $[N_j \times 1]$: $\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T$, $j = 1, 2, \dots, M$; $\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – вектор «не-

вязки», имеющий размер $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, в который

входят M векторов η_j , имеющих размер $[N_j \times 1]$: $\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$, элементы которых

описываются соотношениями:

$$\eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^m} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^m} \varepsilon_{k-2,j} + \frac{1}{\sigma_{0,j}^m} \varepsilon_{k,j},$$

$$k = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{1, M}, \quad \eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \quad \eta_{1,j} = \frac{1}{\sigma_{0j}^m},$$

$$j = 1, 2, \dots, M; \quad P_\lambda = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} \text{ – матрица}$$

линейного преобразования вектора остатков, имеющая размер $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right]$, в которую входят

M матриц P_j размером $[N_j \times N_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, и нулевые матрицы Θ . Матрицы P_j , $j = \overline{1, M}$,

имеют следующую структуру: по главной диагонали расположены элементы $p_{i,i} = \frac{1}{\sigma_{0j}^m}$, $i = \overline{1, N_j}$;

по побочной диагонали расположены элементы: $p_{i,i-1} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^m}$, $i = \overline{2, N_j}$; под побочной диагональю

элементы описываются выражением: $p_{i,i-2} = -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^m}$, $i = \overline{3, N_j}$.

С учетом введенных обозначений получаем регрессионную модель вида

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases} \quad (18)$$

Разработка итерационной процедуры уточнения коэффициентов регрессионной модели

Оценивание параметров ползучести основано на минимизации остаточной суммы квадратов отклонений модели (2) от результатов эксперимента: $Q = \|\varepsilon\|^2 = \|p - \hat{p}\|^2 \rightarrow \min$, которую с учетом системы (18) при невырожденной матрице P_λ можно представить в виде $Q = \|\varepsilon\|^2 = \|P_\lambda^{-1}b_\lambda - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2$. После дифференцирования остаточной суммы квадратов по переменным λ_i и приравнивания, нулю результатов дифференцирования, получаем систему нормальных уравнений, которая в векторной форме имеет вид

$$(F^T - B_\lambda^T D_p^T)_\lambda^{-1} F \lambda = (F^T - B_\lambda^T D_p^T)_\lambda^{-1} b, \quad (19)$$

где B_λ – блочно-диагональная матрица размера

$$\left[4 \sum_{j=1}^M N_j \times 4 \right] \text{ с матрицами-столбцами } P_\lambda^{-1} (b - F \lambda)$$

размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$ по диагонали;

$$D_p = \left[\frac{dP_\lambda}{d\lambda_1} : \frac{dP_\lambda}{d\lambda_2} : \frac{dP_\lambda}{d\lambda_3} : \frac{dP_\lambda}{d\lambda_4} \right] - \text{блочная матрица раз-}$$

$$\text{мера } \left[\sum_{j=1}^M N_j \times 4 \sum_{j=1}^M N_j \right].$$

Решение системы (19) имеет вид:

$$\hat{\lambda} = \left[(F^T - B_\lambda^T D_p^T)_\lambda^{-1} F \right]^{-1} (F^T - B_\lambda^T D_p^T)_\lambda^{-1} b. \quad (20)$$

Процедура итерационного уточнения элементов вектора λ основана на формуле (20) **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и имеет вид рекуррентного соотношения:

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left[(F^T - B_{\lambda^{(i)}}^T D_p^T)_\lambda^{-1} F \right]^{-1} (F^T - B_{\lambda^{(i)}}^T D_p^T)_\lambda^{-1} b, \quad (21)$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$ находится из минимизации невязки $\|\eta\|^2 = \|b - F\hat{\lambda}\|^2 \Rightarrow \min$, откуда

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b. \quad (22)$$

Подытоживая вышеизложенное, последовательность операций в алгоритме процедуры итерационного среднеквадратичного оценивания может быть представлена следующим образом.

1. По полученным выше формулам формируется регрессионная модель (15), далее по формулам (16, 17) находится оценка параметра m .

2. Формируются вектор b и матрица F обобщенной регрессионной модели (18).

3. На основе формулы (22) вычисляется начальная оценка $\hat{\lambda}^{(i)}, i = 0$.

4. Вычисляются матрицы $P_{\lambda^{(i)}}$, $\Omega_{\lambda^{(i)}}$, $B_{\lambda^{(i)}}$ и D_p .

5. На основе формулы (21) вычисляется следующее приближение $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ вектора оценок коэффициентов модели (18).

6. Происходит сравнение по норме векторов $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ и $\hat{\lambda}^{(i)}$. Если $\max_{j=1,2,3,4} |\hat{\lambda}_j^{(i+1)} - \hat{\lambda}_j^{(i)}| < \delta$, где $\delta > 0$ – заданная малая величина, то процесс уточнения прекращается и в качестве вектора оценок коэффициентов модели (18) принимается вектор $\hat{\lambda}^{(i+1)}$. Если $\max_{j=1,2,3,4} |\hat{\lambda}_j^{(i+1)} - \hat{\lambda}_j^{(i)}| \geq \delta$, то происходит увеличение i на единицу, а затем возврат к шагу 4 описанного алгоритма вычислений.

На основе найденных оценок коэффициентов регрессионной модели (18) с учетом формул (7) находятся оценки параметров модели ползучести (2). Из решения квадратного уравнения $\mu^2 - \hat{\lambda}_1 \mu - \hat{\lambda}_2 = 0$ находятся оценки $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$, а затем оценки параметров ползучести α_1 и α_2 :

$$\hat{\alpha}_1 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\mu}_1, \quad \hat{\alpha}_2 = -\frac{1}{\tau} \ln \hat{\mu}_2. \quad (23)$$

Оценки параметров c_1 и c_2 находятся из решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{n}_1 + \hat{n}_2 = \frac{\hat{\lambda}_3}{1 - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2}; \\ \hat{n}_1 (1 - \hat{\mu}_1) + \hat{n}_2 (1 - \hat{\mu}_2) = \hat{\lambda}_4. \end{cases} \quad (24)$$

Применение численного метода оценки параметров первой стадии деформации ползучести на основе разностных уравнений

Разработанный численный метод был применен при обработке экспериментальных диаграмм ползучести поливинилхлоридного пластика по данным из работы [12], полученных при исследовании трубчатых образцов длиной 1000 мм и сечением 1,2 мм² при температуре $T = 20^\circ \text{C}$ и пяти различных значениях напряжений $\sigma_0 = \{4.66; 6.29; 8.75; 10.38; 12.02\}$ МПа. Для формирования равномерной по времени t выборки с периодом дискретизации $\tau = 0.1$ была проведена предварительная обработка экспериментальных данных с помощью скользящего среднего.



При этом было установлено, что данная обработка существенно не влияет на исходные диаграммы ползучести.

В соответствии с разработанным алгоритмом оценки параметра m была построена обобщенная регрессионная модель (15). На её основе по формулам (16, 17) была получена оценка параметра $\hat{m} = 1.319$. С использованием итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели (18) после 11 итераций были получены следующие оценки коэффициентов: $\hat{\lambda}_1 = 1.388$, $\hat{\lambda}_2 = -0.405$, $\hat{\lambda}_3 = 4.76 \cdot 10^{-5}$, $\hat{\lambda}_4 = 0.00108$. Отсюда по формулам (23)-(24) были найдены оценки параметров модели ползучести: $\hat{c}_1 = 0.0011$, $\hat{\alpha}_1 = 0.284$, $\hat{c}_2 = 0.0018$, $\hat{\alpha}_2 = 8.76$. С учетом найденных оценок параметров модели зависимость деформации ползучести от времени и напряжения может быть представлена в виде:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = [0.0011(1 - e^{-0.284t}) + 0.0018(1 - e^{-8.76t})] \sigma_0^{1.319}. \quad (25)$$

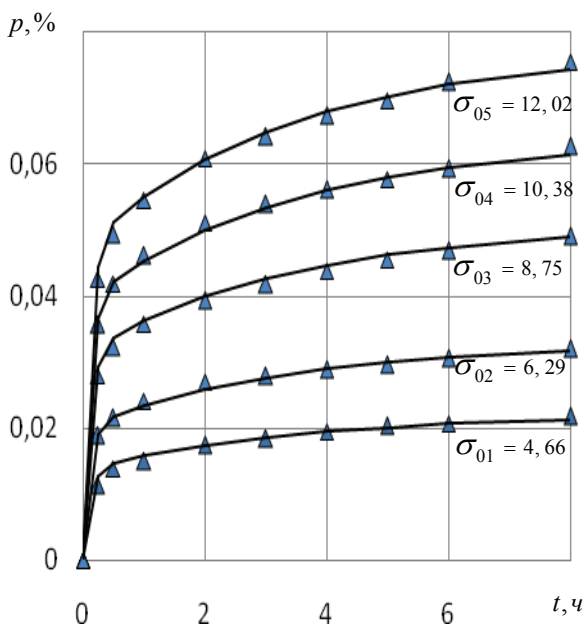


Рис. 1. Экспериментальные данные по деформации ползучести и кривые ползучести, построенные на основе модели (25), при различных значениях номинального напряжения σ_0

На рис. 1 изображены экспериментальные данные по деформации ползучести (треугольные маркеры) и кривые ползучести, построенные на основе модели (25), при различных значениях номинального напряжения σ_0 (сплошные линии). Величина нормированной остаточной суммы

$$\text{квдратов } s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N_j-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N_j-1} p_{k,j}^2}} \cdot 100\%, \text{ как мера}$$

отклонения расчетных данных от экспериментальных, составила для каждой j -ой кривой соответственно 3,56 %, 1,83 %, 1,99 %, 1,42 %, 1,65 %. Нормированная остаточная сумма квадратов по всей совокупности кривых ползучести составила 1,77 %, что, как и коэффициент детерминации равный $R^2 = 0.998$, подтверждает эффективность разработанного численного метода и высокую степень адекватности построенной модели экспериментальным данным.

С помощью статистического анализа результатов математического моделирования получены оценки погрешности вычисления параметров модели и построены доверительные интервалы для кривых ползучести. На рисунках 2-6 изображены результаты эксперимента (точки), кривые, построенные на основе разработанной модели (25), и границы доверительных интервалов при доверительной вероятности $\beta = 0,97$, полученные при различных номинальных напряжениях σ_{0j} .

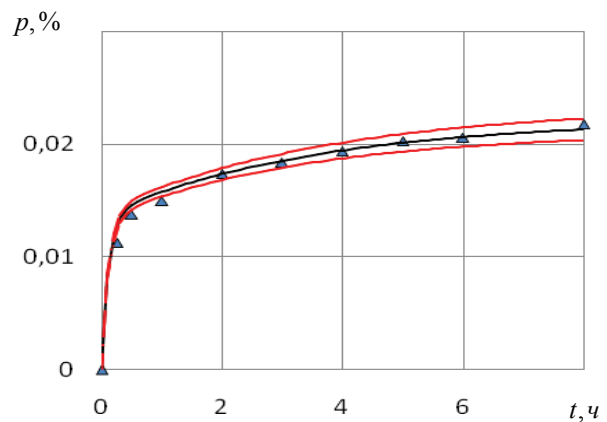


Рис. 2. Доверительные интервалы для результатов вычислений при $\sigma_0 = 4.66$ МПа на основе построенной модели

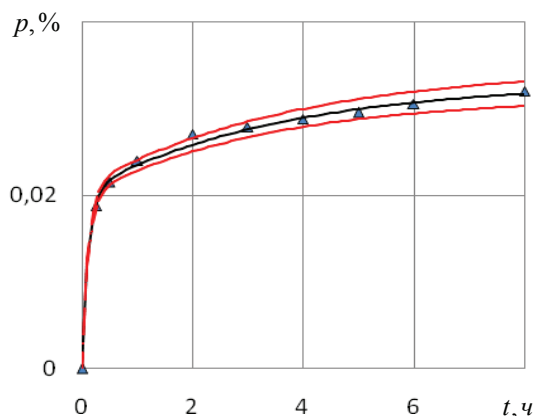


Рис. 3. Доверительные интервалы для результатов вычислений при $\sigma_0 = 6.29$ МПа на основе построенной модели

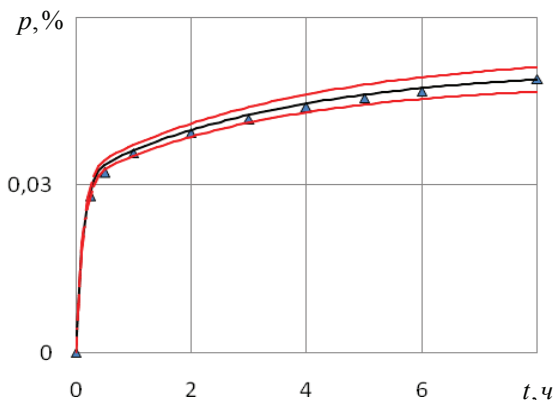


Рис. 4. Доверительные интервалы для результатов вычислений при $\sigma_0 = 8.75$ МПа на основе построенной модели

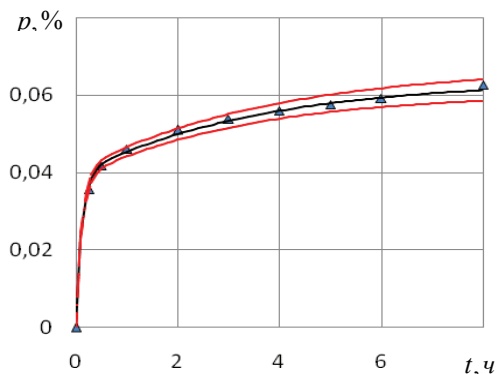


Рис. 5. Доверительные интервалы для результатов вычислений при $\sigma_0 = 10.38$ МПа на основе построенной модели

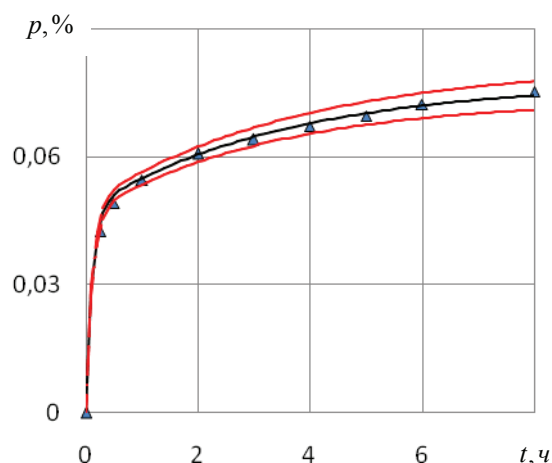


Рис. 6. Доверительные интервалы для результатов вычислений при $\sigma_0 = 12.02$ МПа на основе построенной модели

Выводы

Таким образом, разработан новый численный метод оценивания параметров первой стадии деформации ползучести. В основе метода лежит обобщенная регрессионная модель, описывающая результаты эксперимента в форме диаграмм деформации ползучести при различных значениях напряжения. Выведены соотношения между коэффициентами обобщенной регрессионной модели и параметрами модели деформации ползучести, разработана итерационная процедура среднеквадратического оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели. Проведена апробация нового численного метода при обработке результатов эксперимента в форме кривых ползучести поливинилхлоридного пластика при температуре 20 °С, которая подтвердила справедливость полученных соотношений и достоверность выводов, а также высокую эффективность разработанного численного метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. М. : Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
2. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. М. : Финансы и статистика, 1981. 302 с.
3. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн. 2 : пер. с англ. М. : Финансы и статистика, 1987. 351 с.
4. Зотеев В.Е. Математические основы построения разностных уравнений для задач параметрической идентификации // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физико-математические науки. 2008. № 2 (17). С. 192–202.
5. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений. М. : Машиностроение, 2009. 344 с.



6. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация линейной динамической системы на основе стохастических разностных уравнений // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 9. С. 120–128.
7. Зотеев В.Е., Заусаева М.А. Определение параметров двумерных динамических процессов на основе разностных схем / Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физико-математические науки. 2010. № 1 (20). С.154–161.
8. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М. : МГИУ, 2007. 263 с.
9. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. М. : Наука, 1975. 319 с.
10. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушения материалов и элементов конструкций. М. : Машиностроение, 2004. 264 с.
11. Расчеты и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. М. : ВНИИМАШ, 1982.
12. Романюк М.А. Численные методы определения параметров нелинейных математических моделей на основе стохастических разностных уравнений : дис. ... канд. техн. наук. Самара, 2014. 378 с.
13. Самарин Ю.П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. 1974. № 9. С. 24–27
14. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. М. : Статистика, 1977. 200 с.

REFERENCES

1. Granovskii V. A., Siraya T. N. Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniyakh [Methods of processing experimental data in the process of measurements]. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1990, 288 p.
2. Demidenko E. Z. Lineinaya i nelineinaya regressii [Linear and non-linear regressions]. Moscow: Finansy i statistika Publ., 1981, 302 p.
3. Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis. New York: Wiley, 1966. 407 p. (Russ. ed.: Dreiper N., Smit G. Prikladnoi regressionnyi analiz. Kn. 2: per. s angl. Moscow: Finansy i statistika Publ., 1987, 351 p.).
4. Zoteev V.E. Matematicheskie osnovy postroeniya raznostnykh uravnenii dlya zadach parametriceskoi identifikatsii [Mathematical Foundations of Construction of Difference Equations for Problems of Parametric Identification]. *Vestnik Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki [Vestnik of Samara State Technical University. Ser.: Physical and mathematical sciences]*, 2008, No.2 (17), pp. 192–202.
5. Zoteev V.E. Parametriceskaya identifikatsiya dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravnenii [Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2009, 344 p.
6. Zoteev V.E. Parametriceskaya identifikatsiya lineinoi dinamicheskoi sistemy na osnove stokhasticheskikh raznostnykh uravnenii [Parametric identification of a linear dynamical system on the basis of stochastic difference equations]. *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations]*, 2008, Vol. 20, No. 9, pp. 120–128.
7. Zoteev V.E., Zausaeva M.A. Opredelenie parametrov dvumernykh dinamicheskikh protsessov na osnove raznostnykh skhem [Determination of the parameters of two-dimensional dynamic processes on the basis of difference schemes]. *Vestnik Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser.: Fiziko-matematicheskie nauki [Vestnik of Samara State Technical University. Ser.: Physical and mathematical sciences]*. 2010, No. 1 (20). pp.154–161.
8. Lokoshchenko A.M. Modelirovanie protsessa polzuchesti i dlitel'noi prochnosti metallov [Modeling of creep and long-term strength of metals]. Moscow: Moscow State Industrial University Publ., 2007, 263 p.
9. Pshenichnyi B. N., Danilin Yu. M. Chislennyye metody v ekstremal'nykh zadachakh [Numerical methods in extremum problems]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 319 p.
10. Radchenko V.P., Eremin Yu.A. Reologicheskoe deformatsionnoye i razrusheniye materialov i elementov konstruktssii [Rheological deformation and destruction of materials and structural elements]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2004, 264 p.
11. Raschety i ispytaniya na prochnost'. Raschetnye metody opredeleniya nesushchei sposobnosti i dolgovechnosti elementov mashin i konstruktssii [Calculations and strength tests. Calculation methods for determining the bearing capacity and durability of machine elements and structures]. Moscow: Russian research institute of standardization and certification in mechanical engineering Publ., 1982.
12. Romanyuk M.A. Chislennyye metody opredeleniya parametrov nelineinykh matematicheskikh modelei na osnove stokhasticheskikh raznostnykh uravnenii : dis. ... kand. tekhn. Nauk [Numerical methods for determining the parameters of nonlinear mathematical models on the basis of stochastic difference equations: Ph.D. (Engineering) thesis]. Samara, 2014, 378 p.
13. Samarin Yu.P. Postroenie eksponentsial'nykh approksimatsii dlya krivykh polzuchesti metodom posledovatel'nogo vydeleniya eksponentsial'nykh slagaemykh [Construction of exponential approximations for creep curves by the method of sequential extraction of exponential terms]. *Problemy prochnosti [Strength of Materials]*, 1974. No. 9, pp. 24–27.
14. Chetyrkin E. M. Statisticheskie metody prognozirovaniya [Statistical methods of forecasting]. Moscow: Statistika Publ., 1977, 200 p.

Информация об авторах

Зотеев Владимир Евгеньевич - д. т. н., доцент, Самарский государственный технический университет, г. Самара, e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Макаров Роман Юрьевич - аспирант, Самарский государственный технический университет, г. Самара, e-mail: makaroman1@yandex.ru

Для цитирования

Зотеев В. Е. Численный метод определения параметров первой стадии деформации ползучести / В. Е. Зотеев, Р. Ю. Макаров // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - 2017. - Т. 56, № 4. - С. 40–48. - DOI: 10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48.

Authors

Vladimir Evgenievich Zoteev – Doctor of Engineering Science, Associate Professor, Samara State Technical University, Samara, tel. +7 (846) 337-04-43, e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Roman Yurievich Makarov – Ph.D. student, Samara State Technical University, Samara, e-mail: makaroman1@yandex.ru

For citation

Zoteev V.E., Makarov R.Yu. Chislennyyi metod opredeleniya parametrov pervoi stadii deformatsii polzuchesti [Numerical method of determining the parameters of the first stage of creep strain]. *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern technologies. System analysis. Modeling]*, 2017. Vol. 56, No. 4, pp. 40–48. DOI: 10.26731/1813-9108.2017.4(56).40-48.