



## Для цитирования

Милов А. В. Влияние флюса на точность измерений в процессе индукционной пайки алюминиевых волноводных трактов / А. В. Милов, В. С. Тынченко, А. В. Мурыгин // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - 2018. - Т. 60, № 4. - С. 38–46. - DOI: 10.26731/1813-9108.2018.4(60).38-46

## For citation

Milov A. V., Tynchenko V. S., Murygin A. V. Vliyanie flyusa na tochnost' izmerenii v protsesse induktsionnoi paiki alyuminievikh volnovodnykh traktov [Flux influence on the accuracy of measurements during induction soldering of aluminum waveguide ducts]. Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2018, Vol. 60, No. 4, pp. 38–46. DOI: 10.26731/1813-9108.2018.4(60).38-46

УДК 519.688:621.3.011.7

DOI: 10.26731/1813-9108.2018.4(60).46-54

**A. В. Банщиков, А. А. Ветров, В. Д. Иртегов, Т. Н. Титоренко**

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация

Дата поступления: 3 октября 2018 г.

## АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СРЕДСТВАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В МАШИНОВЕДЕНИИ

**Аннотация.** Электрические цепи уже давно имеют разнообразные приложения в транспорте и других областях инженерных знаний. Создана оригинальная модель и на ее основе в интегрированной среде *Embarcadero Delphi* на языке *Object Pascal* разработан визуальный редактор графа электрической цепи. Особенность подхода заключается в том, что базовая информация о графе расширена данными о параметрах и функциях схемы цепи для автоматического формирования ее символьного описания. Посредством графического пользователя интерфейса для конкретной нелинейной электрической цепи сформированы граф и соответствующее ему описание в виде вложенного списка для дальнейшего исследования созданными ранее программными комплексами по моделированию и качественному анализу электрических цепей в символьном виде на PC. Для исследуемой цепи проведен динамический анализ, а именно, построена символьная модель (смешанный потенциал и дифференциальные уравнения состояния), найдены некоторые положения равновесия (не зависящие от времени решения уравнений состояния) и рассмотрен вопрос об их устойчивости по Ляпунову посредством выписанных уравнений возмущенного движения в первом приближении. Условия асимптотической устойчивости в виде системы неравенств Льенара – Шипара выражены через коэффициенты характеристического полинома шестой степени. При параметрическом анализе условий устойчивости использовались средства языка программирования и функции символьно-численного моделирования системы компьютерной алгебры *Mathematica*. Представлена графическая интерпретация результатов исследования устойчивости положений равновесия.

**Ключевые слова:** электрическая цепь, графический редактор, компьютерная алгебра, моделирование, устойчивость, параметрический анализ.

**A. V. Banshchikov, A. A. Vetrov, V. D. Irtegov, T. N. Titorenko**

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation

Received: October 3, 2018

## ANALYSIS OF ELECTRICAL CIRCUITS BY MEANS OF COMPUTER ALGEBRA IN MACHINE SCIENCE

**Abstract.** Electrical circuits have long been diversely applied in transport and other fields of engineering. The paper presents an original model and, based on it, a visual editor of the electrical circuit graph developed in the integrated environment of *Embarcadero Delphi* in *Object Pascal* language. The novelty of the approach is that the basic information about the graph is expanded by data on the parameters and functions of the circuit diagram for the automatic generation of its symbolic description. Through graphical user interface for a specific nonlinear electrical circuit, a graph and a corresponding description in the form of a nested list are formed for further investigation by previously created software complexes for modeling and qualitative analysis of electrical circuits in symbolic form on PC. A dynamic analysis was carried out for the investigated chain: namely, a symbolic model (mixed potential and differential equations of state) was constructed, certain equilibrium positions (time-independent solutions of the state equations) were found and the question of their Lyapunov stability by means of the outlined equations of perturbed motion in the first approximation. The conditions for the asymptotic stability in the form of a system of Lienard-Chipard inequalities are obtained in terms of the coefficients of the characteristic polynomial of sixth degree. During the parametric analysis of stability conditions, the programming language tools and the functions of symbolic-numerical modeling of the computer algebra system “*Mathematica*” were used. A graphic interpretation of the results of the study on the equilibrium positions stability is presented

**Keywords:** electrical circuit, graphic editor, computer algebra, modeling, stability, parametric analysis.

## Введение

Электрические цепи (ЭЦ) уже давно вошли в учебные процессы по многим техническим специальностям, но по-прежнему являются предметом разнообразных исследований методов их анализа и синтеза. ЭЦ находят широкое применение при эксплуатации, проектировании и разработке устройств автоматики, телемеханики и связи в транспорте, машиностроении и других областях инженерных знаний.

В последние годы существенно возросло значение систем компьютерной алгебры (СКА) [1, 2] и методов их использования [3] для научных вычислений в различных областях естественных наук и инженерных знаний. Многолетний опыт авторов показывает, что СКА оказались достаточно эффективными на этапах построения математических моделей и анализа их свойств. Сочетание методов аналитической механики и теории устойчивости движения с алгоритмами СКА (в данном случае системы *Mathematica* [4]) позволяет создавать достаточно мощные инструменты для исследования электрических цепей. На примере одной нелинейной электрической цепи в настоящей работе демонстрируется графический редактор [5] и применение комплексов программ [6, 7] для моделирования и качественного анализа электрических цепей в символьном виде на РС.

В качестве электрической рассматривается цепь, в которой произвольным образом соединены элементы сопротивления, катушки индуктивности, конденсаторы, источники тока или напряжения. Электромеханические аналогии [8, 9] позволяют использовать методы аналитической механики для описания электрических цепей и, тем самым, применять методы исследования механических систем к электрическим цепям. Построение функции Лагранжа и уравнений состояния линейной цепи в форме Лагранжа 2-го рода описано в [10].

В качестве нелинейной цепи рассматривается электрическая цепь, принадлежащая классу «полных» в смысле [11]. Дифференциальные уравнения такой цепи имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_k(i_k) \frac{di_k}{dt} = \frac{\partial P(i, u)}{\partial i_k} \quad (k = 1, \dots, r), \\ C_l(u_l) \frac{du_l}{dt} = -\frac{\partial P(i, u)}{\partial u_l} \quad (l = r + 1, \dots, r + m), \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $L_k(i_k)$  – индуктивности,  $C_l(u_l)$  – емкости,  $i_k$  – токи, протекающие через катушки индуктивности,  $u_l$  – напряжения на конденсаторах. Функция  $P(i, u)$  описывает часть цепи, содержащую элементы сопротивления и источники напряжения (тока), и называется смешанным потенциалом. Здесь  $i = (i_1, \dots, i_r)$ ,  $u = (u_{r+1}, \dots, u_{r+m})$  – вектор-строки.

Метод построения смешанного потенциала по графу нелинейной цепи подробно изложен в [10].

## Исследование конкретной электрической цепи

**1. Описание редактора для представления графа цепи.** Создана модель электрической цепи, особенность которой заключается в расширении классических характеристик неориентированного графа (множество вершин и ребер) за счет параметров цепи. Такими параметрами могут являться постоянные емкости, индуктивности, токи, сопротивления и нелинейные функции. На основе созданной модели в интегрированной среде Embarcadero Delphi на языке Object Pascal разработан графический редактор [5] представления графа электрической цепи, который поддерживает стандартные функции, присущие такого рода системам (см., например, [12]). Создание программного обеспечения происходило в классической парадигме объектно-ориентированного программирования с использованием инкрементной модели разработки. Графический пользовательский интерфейс обеспечивает ввод схемы и данных графа электрической цепи путем интерактивного добавления связанных графических примитивов, предназначенных для построения линейной или специального класса нелинейной электрической цепи. Добавление параметров отдельных элементов цепи к соответствующим вершинам и ребрам графа реализовано через контекстное меню. Отличие от аналогичных разработок [13] заключается в том, что по построенному графу пользователь редактора может автоматически сформировать специальное символьное описание электрической цепи в виде вложенного списка для дальнейшего исследования другими программными комплексами по моделированию [6] и качественному анализу [7] электрических цепей в символьном виде.

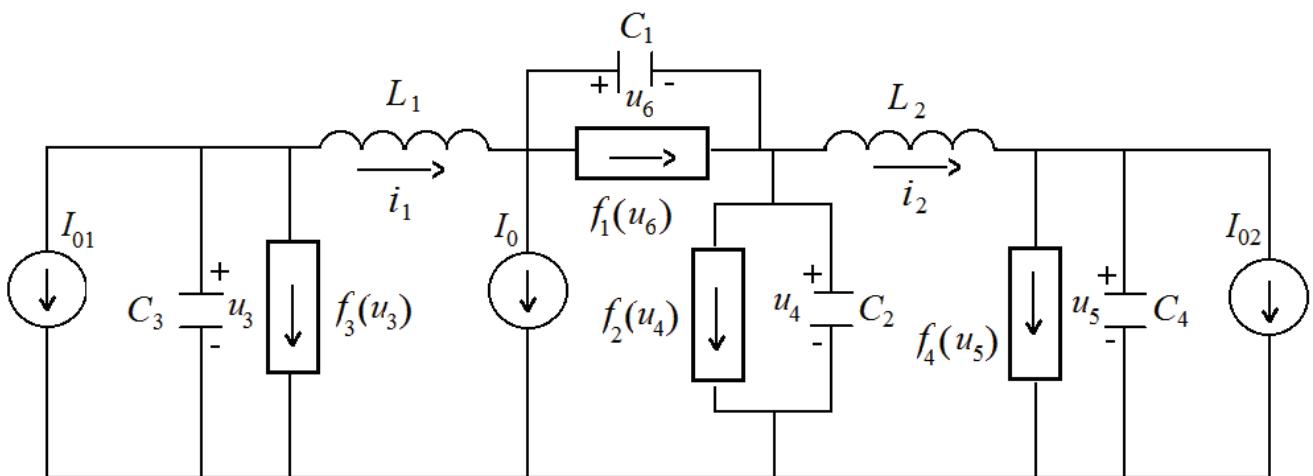


Рис. 1. Электрическая схема

На рис. 1 приведена схема рассматриваемой нелинейной электрической цепи [14]. Здесь  $i_1, i_2$  – токи, протекающие через катушки индуктивности;  $u_3, u_4, u_5, u_6$  – напряжения на конденсаторах;  $C_1, C_2, C_3, C_4, L_1, L_2, I_0, I_{01}, I_{02}$  – параметры цепи, соответствующие постоянным емкостям, индуктивностям, токам. Нелинейными элементами цепи являются сопротивления, вольтамперные характеристики которых описываются функциями  $f_1(u_6), f_2(u_4), f_3(u_3), f_4(u_5)$ . Графики последних предполагаются качественно совпадающими: они находятся в первом и третьем квадрантах координатной плоскости  $(i, u)$ , проходят через начало координат и имеют по две экстремальные точки в первом квадранте.

Представим алгоритм использования редактора для создания графа рассматриваемой цепи.

Используя имеющиеся инструменты (например, «эллипс»), создают вершины графа. Следующим шагом является присвоение вершинам семантических данных (например, задать нумерацию).

Для этого необходимо произвести двойной щелчок по нужной вершине или вызвать пункт контекстного меню вершины «Свойства». Далее необходимо соединить вершины графа ребрами, используя инструмент «соединительная линия», расположенный на панели инструментов. После завершения построения «скелета» цепи необходимо по аналогии с вершинами установить параметры модели цепи для ребер графа, задать подписи и изменить стиль отображения (например, цвет и толщину линий). Полученный в итоге редактором граф цепи представлен на рис. 2.

На последнем шаге с помощью инструмента «экспорт символьного описания» автоматически формируется описание графа исследуемой электрической цепи (см. рис. 3) в виде списка пар  $\{\{j_1, j_2\}, p_{j_3}\}$ . Здесь  $j_1 < j_2$  – номера вершин графа,  $\{j_1, j_2\}$  – ребра графа,  $p_{j_3}$  – символьная характеристика электрического элемента, соответствующего данному ребру графа.

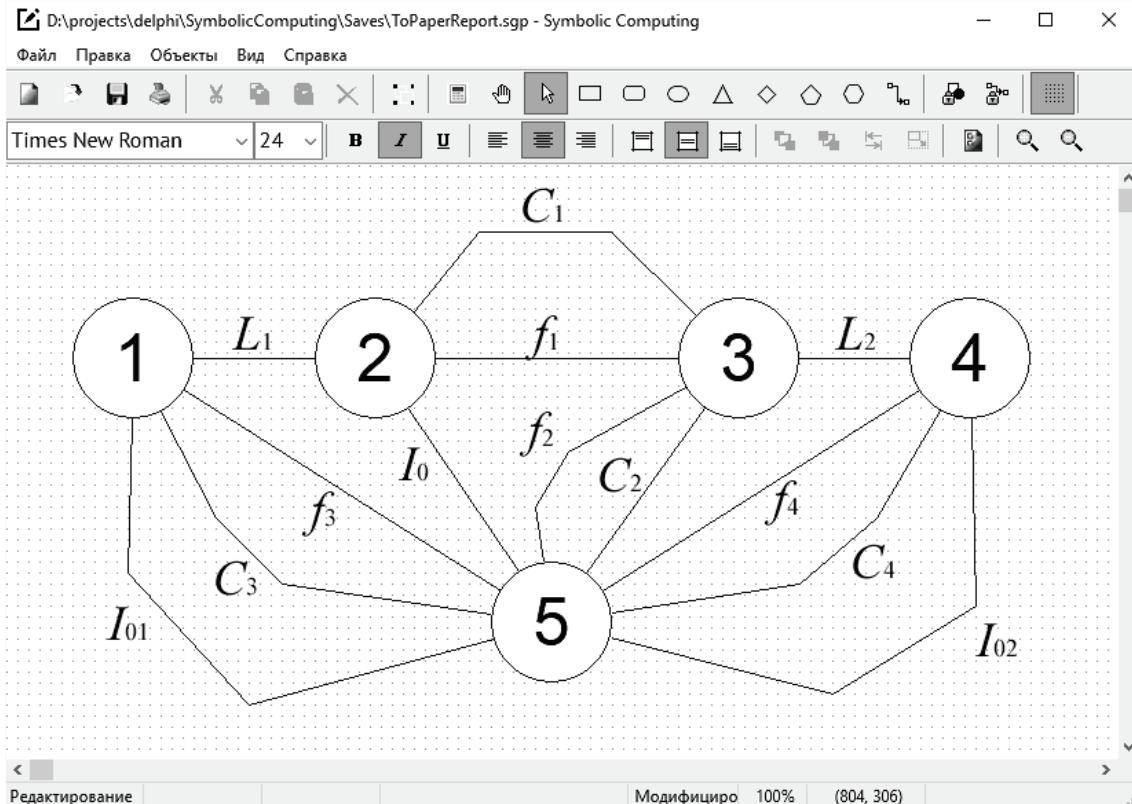


Рис. 2. Результат построения графа цепи

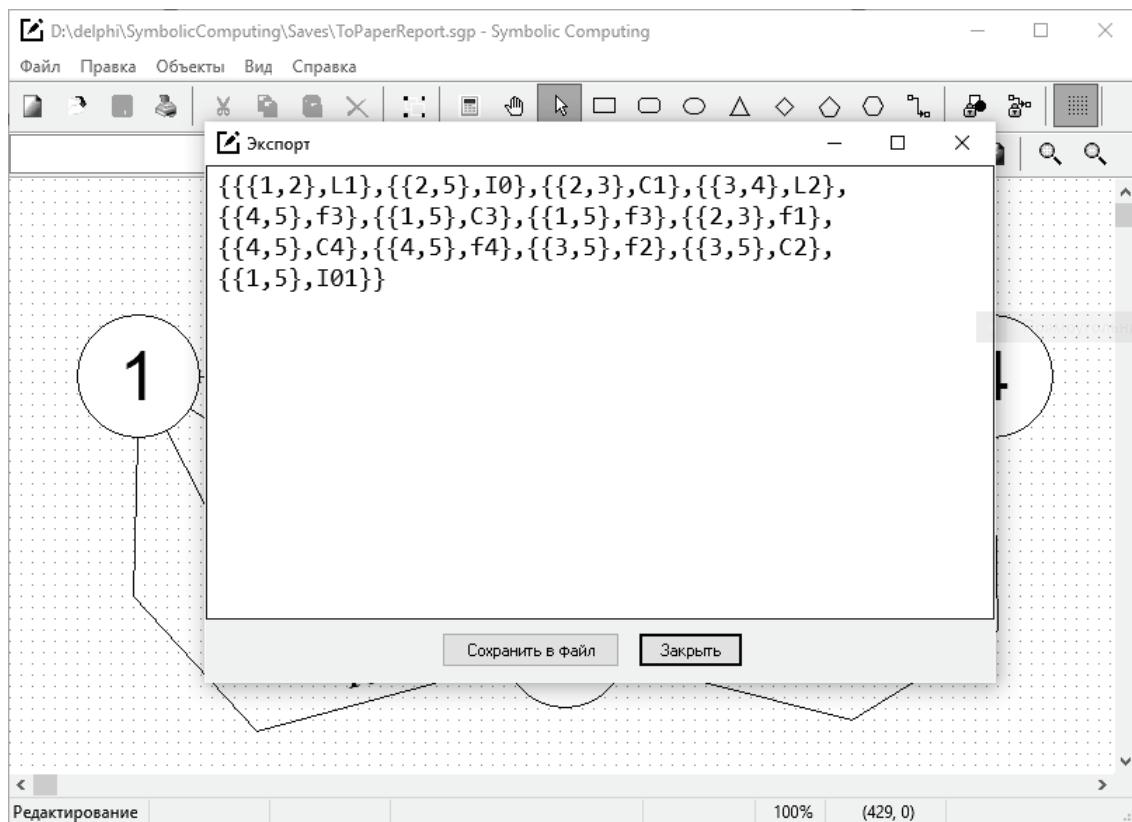


Рис. 3. Символьное описание графа цепи



## 2. Построение символьной модели цепи и ее положения равновесий

На входе пакета расширения *Circuits* из [6, 10] сформированное редактором символьное описание графа исследуемой цепи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \{\{1,2\}, L_1\}, \{\{2,3\}, f_1\}, \{\{2,3\}, C_1\}, \\ & \{\{3,4\}, L_2\}, \{\{4,5\}, I_{02}\}, \{\{4,5\}, C_4\}, \{\{4,5\}, f_4\}, \\ & \{\{3,5\}, C_2\}, \{\{3,5\}, f_2\}, \{\{2,5\}, I_0\}, \\ & \{\{1,5\}, C_3\}, \{\{1,5\}, f_3\}, \{\{1,5\}, I_{01}\} \end{aligned}$$

где  $f_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) – обозначения для функций  $f_j(u_k)$ . Далее с помощью этого пакета строятся смешанный потенциал:

$$\begin{aligned} P(i, u) = & i_1(u_4 + u_6 - u_3) + i_2(u_5 - u_4) + I_0(u_4 + u_6) - \\ & - I_{01}u_3 - I_{02}u_5 - \int_0^{u_6} f_1(u) du - \int_0^{u_4} f_2(u) du - \\ & - \int_0^{u_3} f_3(u) du - \int_0^{u_5} f_4(u) du \end{aligned}$$

и уравнения состояния цепи вида (1):

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} = & u_4 + u_6 - u_3, \quad L_2 \frac{di_2}{dt} = u_5 - u_4, \\ C_3 \frac{du_3}{dt} = & i_1 + f_3(u_3) + I_{01}, \\ C_2 \frac{du_4}{dt} = & i_2 - i_1 + f_2(u_4) - I_0, \quad (2) \\ C_4 \frac{du_5}{dt} = & I_{02} - i_2 + f_4(u_5), \\ C_1 \frac{du_6}{dt} = & -I_0 - i_1 + f_1(u_6). \end{aligned}$$

Подробнее о процессах построения функции  $P(i, u)$  и уравнений (2) смотрите в [10].

Рассмотрим задачу выделения положений равновесия (т. е. не зависящих от времени  $t$  решений уравнений состояния цепи). Для нахождения указанных решений приравняем к нулю правые части уравнений (2):

$$\begin{aligned} u_4 + u_6 - u_3 &= 0, \quad u_5 - u_4 = 0, \\ I_{01} + i_1 + \tilde{f}_3(u_3) &= 0, \quad i_2 - i_1 + \tilde{f}_2(u_4) - I_0 = 0, \quad (3) \\ I_{02} - i_2 + \tilde{f}_4(u_5) &= 0, \quad I_0 + i_1 - \tilde{f}_1(u_6) = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{f}_1(u_6) = g_1 u_6 (u_6 - 3s_1)^2$ ,  $\tilde{f}_3(u_3) = g_3 u_3 (u_3 - 3s_3)^2$ ,  $\tilde{f}_2(u_4) = g_2 u_4 (u_4 - 3s_2)^2$ ,  $\tilde{f}_4(u_5) = g_4 u_5 (u_5 - 3s_4)^2$  – кубические интерполяционные многочлены Лагранжа, аппроксимирующие функции  $f_1(u_6)$ ,  $f_2(u_4)$ ,  $f_3(u_3)$ ,  $f_4(u_5)$ .  $s_j$  – первая экстремальная точка функции  $f_j(u_l)$ ,  $g_j = f_j(s_j)/(4s_j^3)$ .

Исключив с помощью части уравнений (3) переменные  $u_3, u_5, i_1, i_2$  из остальных, получим два полиномиальных алгебраических уравнения относительно  $u_4$  и  $u_6$ :

$$\begin{aligned} & I_{01} - I_0 + g_1 u_6 (u_6 - 3s_1)^2 + \\ & + g_3 (u_4 + u_6) (u_4 + u_6 - 3s_3)^2 = 0, \\ & g_2 u_4 (u_4 - 3s_2)^2 + g_4 u_4 (u_4 - 3s_4)^2 - \\ & - g_1 u_6 (u_6 - 3s_1)^2 + I_{02} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В [15] сделаны оценки на количество действительных решений уравнений (4) (т. е. положений равновесия) и выписаны некоторые из них в громоздком аналитическом виде. В настоящей работе для целей качественного анализа по понятным причинам выбраны достаточно компактные аналитические решения. Решения были получены в [16] при различных ограничениях, налагаемых на параметры задачи. А именно, для ограничений

$$I_{01} = I_0, \quad I_{02} = 0, \quad g_4 = -g_2, \quad s_3 = s_1 + \frac{s_2}{3}, \quad s_4 = s_2$$

имеется решение:

$$\begin{cases} i_1 = -I_0, \quad i_2 = 4g_2 s_2^3, \\ u_3 = 3s_1 + s_2, \quad u_4 = s_2, \quad u_5 = s_2, \quad u_6 = 3s_1 \end{cases}; \quad (5)$$

для ограничений  $I_{01} = I_0 + 4(g_1 s_1^3 + g_3 (s_1 + s_2)^3)$ ,

$$I_{02} = 4(g_2 s_2^3 - g_1 s_1^3), \quad s_3 = s_1 + s_2, \quad s_4 = \frac{s_2}{3} \quad \text{имеется}$$

решение:

$$\begin{cases} i_1 = -I_0 - 4g_1 s_1^3, \quad i_2 = 4(g_2 s_2^3 - g_1 s_1^3), \\ u_3 = s_1 + s_2, \quad u_4 = s_2, \quad u_5 = s_2, \quad u_6 = s_1 \end{cases}; \quad (6)$$

для ограничений  $I_0 = I_{01}$ ,  $I_{02} = 27g_4 s_2 (s_2 - s_4)^2$ ,

$s_3 = s_1 + s_2$  имеется решение:

$$\begin{cases} i_1 = -I_{01}, \quad i_2 = 0, \quad u_3 = 3(s_1 + s_2), \\ u_4 = 3s_2, \quad u_5 = 3s_2, \quad u_6 = 3s_1 \end{cases}; \quad (7)$$

для ограничений  $I_0 = I_{01}$ ,  $s_3 = 2s_1$ ,

$I_{02} = 27s_1(g_2(s_1 - s_2)^2 + g_4(s_1 - s_4)^2)$  имеется решение:

$$\begin{cases} i_1 = -I_0, \quad i_2 = 27g_2 s_1 (s_1 - s_2)^2, \\ u_3 = 6s_1, \quad u_4 = 3s_1, \quad u_5 = 3s_1, \quad u_6 = 3s_1 \end{cases}. \quad (8)$$

**3. Символико-численный анализ положений равновесий на устойчивость.** Возмущенное движение в окрестности положения равновесия запишем в общем виде:

$$\begin{aligned} i_1 &= \zeta_1 + i_1^o, \quad i_2 = \zeta_2 + i_2^o, \quad u_3 = \zeta_3 + u_3^o, \\ u_4 &= \zeta_4 + u_4^o, \quad u_5 = \zeta_5 + u_5^o, \quad u_6 = \zeta_6 + u_6^o, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $i_1^o, i_2^o, u_3^o, u_4^o, u_5^o, u_6^o$  – постоянные значения



переменных в невозмущенном движении (причем  $u_5^o = u_4^o$ ),  $\zeta_j$  ( $j = \overline{1,6}$ ) – отклонения от невозмущенного движения.

Исходными данными для пакета *Analysis* из [7, 10] при исследовании устойчивости служат уравнения (2) и движение (9). По входным данным пакет формирует уравнения возмущенного движения в первом приближении:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d\zeta_1}{dt} + \zeta_3 - \zeta_4 - \zeta_6 &= 0, \\ L_2 \frac{d\zeta_2}{dt} + \zeta_4 - \zeta_5 &= 0, \\ C_3 \frac{d\zeta_3}{dt} - \zeta_1 + n_3 \zeta_3 &= 0, \\ C_2 \frac{d\zeta_4}{dt} + \zeta_1 - \zeta_2 + n_4 \zeta_4 &= 0, \\ C_4 \frac{d\zeta_5}{dt} + \zeta_2 + n_5 \zeta_5 &= 0, \\ C_1 \frac{d\zeta_6}{dt} + \zeta_1 + n_6 \zeta_6 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} n_3 &= 3g_3(3s_3^2 - 4s_3u_3^o + u_3^{o2}); \quad n_4 = 3g_2(3s_2^2 - 4s_2u_4^o + u_4^{o2}); \\ n_5 &= 3g_4(3s_4^2 - 4s_4u_4^o + u_4^{o2}); \\ n_6 &= 3g_1(3s_1^2 - 4s_1u_6^o + u_6^{o2}) \text{ и соответствующие уравнениям (10) коэффициенты характеристического полинома } \Lambda(\lambda) = \sum_{i=0}^6 k_i \lambda^{6-i}: \end{aligned}$$

$$k_0 = C_1 C_2 C_3 C_4 L_1 L_2;$$

$$k_1 = L_1 L_2 (C_1(C_3 C_4 n_4 + C_2(C_4 n_3 + C_3 n_5)) + C_2 C_3 C_4 n_6);$$

$$\begin{aligned} k_2 &= C_1(C_4(C_3(L_1 + L_2) + L_1 L_2 n_3 n_4) + \\ &+ C_3 L_1 L_2 n_4 n_5 + C_2(L_1(C_3 + L_2 n_3 n_5) + C_4 L_2)) + \\ &+ L_2(L_1 n_6(C_3 C_4 n_4 + C_2(C_4 n_3 + C_3 n_5)) + C_2 C_3 C_4); \\ k_3 &= n_6(C_4 L_1 L_2 n_3 n_4 + C_3(C_4(L_1 + L_2) + L_1 L_2 n_4 n_5) + \\ &+ C_2(L_2(C_4 + L_1 n_3 n_5) + C_3 L_1)) + \\ &+ C_1(C_3 L_1 n_4 + C_4((L_1 + L_2)n_3 + L_2 n_4)) + \\ &+ n_5(C_3(L_1 + L_2) + L_1 L_2 n_3 n_4) + C_2(L_1 n_3 + L_2 n_5)) + \\ &+ L_2(C_3 C_4 n_4 + C_2(C_4 n_3 + C_3 n_5)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= (C_2 + C_4)C_3 + (C_3 n_4 n_5 + C_4 n_3 n_4 + C_2 n_3 n_5)L_2 + \\ &+ C_1(C_2 + C_3 + C_4 + L_2(n_3 + n_4)n_5 + L_1 n_3(n_4 + n_5)) + \\ &+ n_6(C_3 L_1 n_4 + C_4((L_1 + L_2)n_3 + L_2 n_4)) + \\ &+ n_5(C_3(L_1 + L_2) + L_1 L_2 n_3 n_4) + C_2(L_1 n_3 + L_2 n_5)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_5 &= n_6(C_2 + C_3 + C_4 + L_2(n_3 + n_4)n_5 + L_1 n_3(n_4 + n_5)) + \\ &+ n_3(C_2 + C_4 + L_2 n_4 n_5) + C_3(n_4 + n_5) + C_1(n_3 + n_4 + n_5); \end{aligned}$$

$$k_6 = (n_4 + n_5)n_6 + n_3(n_4 + n_5 + n_6).$$

С помощью СКА *Mathematica* в явном виде через параметры  $L_1, L_2, C_{l-2}, n_l$  ( $l = \overline{3,6}$ ) выписаны условия (см. критерий Льенара – Шипара [17]):

$$\begin{aligned} k_i > 0, \quad (i = \overline{0,6}); \quad \det \begin{pmatrix} k_1 & k_3 & k_5 \\ k_0 & k_2 & k_4 \\ 0 & k_1 & k_3 \end{pmatrix} > 0; \\ \det \begin{pmatrix} k_1 & k_3 & k_5 & 0 & 0 \\ k_0 & k_2 & k_4 & k_6 & 0 \\ 0 & k_1 & k_3 & k_5 & 0 \\ 0 & k_0 & k_2 & k_4 & k_6 \\ 0 & 0 & k_1 & k_3 & k_5 \end{pmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

обеспечивающие существование корней с отрицательными вещественными частями полинома  $\Lambda(\lambda)$ . Следовательно, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [18] исследуемое решение (9) будет асимптотически устойчиво.

Для демонстрации дальнейшего исследования предположим, что  $n_4 = -n_5, n_3 = n_6$ . Численное моделирование проводилось с помощью функции *RegionPlot* СКА *Mathematica* при следующих значениях емкости и индуктивности:  $C_1 = 1.1 * 10^{-3}, C_2 = 1.2 * 10^{-3}, C_3 = 1.3 * 10^{-3}, C_4 = 1.4 * 10^{-3}, L_1 = 2, L_2 = 3$ . Условия (11) выполняются в области, представленной на рис. 4.

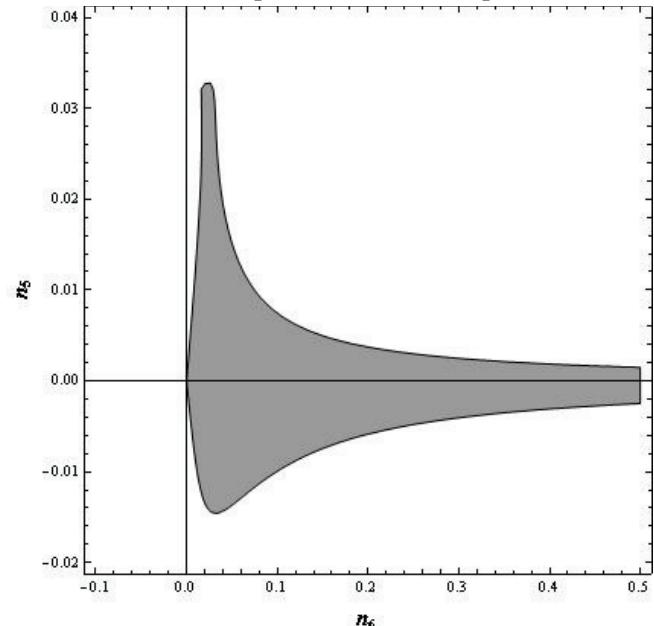


Рис. 4. Область асимптотической устойчивости

Обратим внимание на решения (5)–(8). Заметим, что если постоянные значения  $u_l^o$  ( $l = \overline{3,6}$ )



в невозмущенном движении принимают значения из решений (5) или (6), тогда все  $n_l$  будут равны нулю. Если из решения (7), тогда только  $n_5$  не равно нулю. Для значений из решения (8) будут  $n_3 = 0, n_4 \neq 0, n_5 \neq 0, n_6 = 0$ .

Анализ устойчивости этих частных решений приводит к критическим [19] по Ляпунову случаям. Так, для решений (7) и (8) у характеристического полинома  $\Lambda(\lambda) = \lambda \left( \sum_{i=0}^5 \tilde{k}_i \lambda^{5-i} \right)$  имеется один нулевой корень, а для решений (5) и (6) характеристический полином факторизуется и имеет вид  $\Lambda(\lambda) = \lambda^2 (\tilde{k}_0 \lambda^4 + \tilde{k}_1 \lambda^2 + \tilde{k}_2)$ . Исследование устойчивости при  $n_l = 0$  ( $l = 3, 6$ ) изложено в [16] с применением критерия [20], а при  $n_l = C_{l-2}n$  ( $l = \overline{3, 6}$ ) представлено в [15].

Подробнее рассмотрим анализ устойчивости решения (8), для которого, как замечено выше:  $n_3 = n_6 = 0, n_4 \neq 0, n_5 \neq 0$  и  $\Lambda(\lambda) = \lambda \left( \sum_{i=0}^5 \tilde{k}_i \lambda^{5-i} \right)$ . Если вещественные части корней характеристического полинома пятой степени отрицательны, то решение будет устойчиво, но не асимптотически. Моделирование с помощью функции *RegionPlot* (при тех же вышеприведенных численных значениях емкости и индуктивности) соответствующих условий Льенара – Шипара определяет область значений параметров (см. рис. 5), обеспечивающую требуемые свойства корней. Отметим, что параметр  $n_5$  (или  $n_4$ ) может принимать близкое к нулю отрицательное значение, а для любых  $n_4 > 0$  и  $n_5 > 0$  будет устойчивость решения (8).

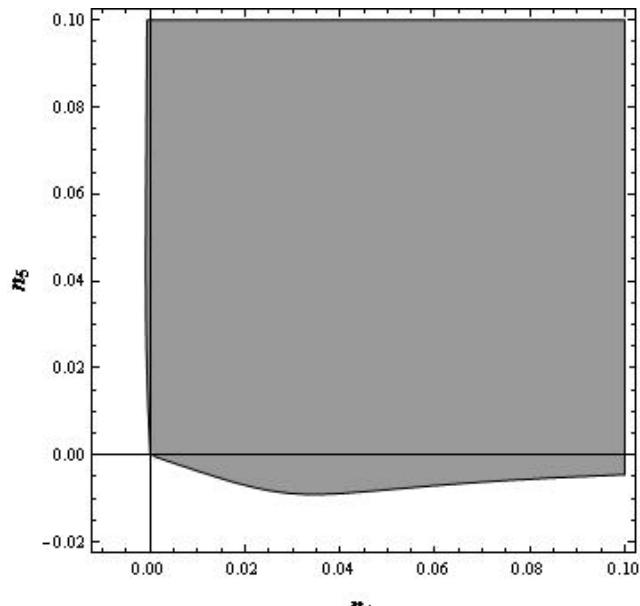


Рис. 5. Область устойчивости решения (8)

### Заключение

В статье не ставилась цель дать обзор по анализу электрических цепей, а лишь продемонстрировать расширение функциональных возможностей созданного программного обеспечения для механических систем на другой класс – электрические цепи. Представленные выше результаты моделирования и качественного анализа полученных дифференциальных уравнений средствами компьютерной алгебры свидетельствуют о том, что предложенный «человеко-машинный» подход позволяет проводить достаточно глубокие исследования многопараметрических задач. К тому же, автоматический режим избавляет специалистов от рутинных вычислений и значительно сокращает время исследования.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-07-00201а.*

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation / B. Buchberger et al. New York : Springer–Verlag, 1983. 284 p.
2. Davenport J.H., Siret Y., Tournier E. Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computations. New York : Academic Press, 1988. 313 p.
3. Cohen J.S. Computer Algebra and Symbolic Computation: mathematical methods. A K Peters, Ltd. 2003. 449 p.
4. Wolfram S. The Mathematica Book. Fourth Edition. New York : Cambridge University Press., 1999.
5. Графический редактор для формирования символьного описания электрических цепей : а. с. 2018614687 ; опубл. 13.04.2018.
6. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей : а. с. 2016618253 ; опубл. 25.07.2016.
7. Программный комплекс для выделения и исследования устойчивости стационарных множеств механических систем : а. с. 2011612429 ; опубл. 05.07.2011.
8. Синицкий Л.А. Методы аналитической механики в теории электрических цепей. Львов : Вища школа, 1978. 139 с.



9. Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Об использовании электромеханических аналогий // Системы поддержки принятия решений для исследования и управления энергетикой. Новосибирск : Наука, 1997. С. 136–145.
10. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем / А.В. Банщиков и др. // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19. № 6. С. 3–18.
11. Brayton R.K., Moser J.K. A theory of nonlinear networks-1 // Quarterly of Appl. Math. 1964. Vol. 22. No. 1. P. 1–33.
12. Краткий обзор графических редакторов структурных моделей сложных систем / И.М. Якимов и др. // Вестник Казан. технолог. ун-та. 2014. Т. 17. № 17. С. 213–221.
13. Окунцов П.В., Соколов Е.А. Графический редактор для составления электрических схем // Материалы восемнадцатой Всерос. конф. Нижневарт. гос. ун-та. Нижневартовск, 2016. С. 1480–1484.
14. Галецкий Ф.П. Импульсный инвертор на тунNELНЫХ диодах. М. : ИТМ и ВТ АН СССР. 1966.
15. Irtegov V., Titorenko T. On modelling and qualitative investigation of nonlinear systems with the aid of computer algebra // Proceedings of the Sixth International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing. Technische Universität München. 2003. P. 199–211.
16. Титоренко Т.Н. Исследование динамических систем с помощью компьютера // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением : тр. IX Междунар. Четаевской конф. Иркутск, 2007. Т. 2. С. 271–283.
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 576 с.
18. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л. : ГИТЛ, 1950. 472 с.
19. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М. : Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
20. Кац А.М. К вопросу о критерии апериодической устойчивости // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15. Вып. 1. С. 120.

## REFERENCES

1. Buchberger B., Collins G.E., Loos R. and Albrecht R. Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation. Second Edition. Springer-Verlag, New York, 1983, 284 p.
2. Davenport J.H., Siret Y., Tournier E. Computer Algebra: Systems and Algorithms for Algebraic Computations. Academic Press, New York, 1988, 313 p.
3. Cohen J.S. Computer Algebra and Symbolic Computation: mathematical methods. AK Peters Ltd, 2003, 449 p.
4. Wolfram S. The Mathematica Book. Fourth Edition. Cambridge University Press, New York, 1999.
5. Banshchikov A.V., Vetrov A.A. Graficheskii redaktor dlya formirovaniya simvol'nogo opisaniya elektricheskikh tsepei [Graphic editor for the formation of a symbolic description of electrical circuits]. Certificate of state registration of a computer program. No. 2018614687. FGU FIPS, April 13, 2018.
6. Banshchikov A.V., Irtegov V.D., Titorenko T.N. Programmnii kompleks dlya modelirovaniya v simvol'nom vide mekhanicheskikh sistem i elektricheskikh tsepei [Software system for modeling in symbolic form of mechanical systems and electrical circuits]. Certificate of state registration of computer program No. 2016618253 FGU FIPS. July 25, 2016
7. Banshchikov A.V., Burlakova L.A., Irtegov V.D., Titorenko T.N. Programmnii kompleks dlya vydeleniya i issledovaniya ustochivosti statcionarnykh mnozhestv mekhanicheskikh sistem [The software package for the isolation and study of the stability of stationary sets of mechanical systems]. Certificate of state registration of computer program No. 2011612429. FGU FIPS, July 5, 2011.
8. Sinitzkii L.A. Metody analiticheskoi mekhaniki v teorii elektricheskikh tsepei [Methods of analytical mechanics in the theory of electrical circuits]. Lvov: Vishcha shkola Publ., 1978, 139 p.
9. Irtegov V.D., Titorenko T.N. Ob ispol'zovanii elektromekhanicheskikh analogii [On the use of electromechanical analogies]. Sistemy podderzhki prinyatiya reshenii dlya issledovaniya i upravleniya energetikoi [Decision Support Systems for Energy Research and Management]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1997, pp. 136–145.
10. Banshchikov A.V., Burlakova L.A., Irtegov V.D., Titorenko T.N. Simvol'nye vychisleniya v modelirovaniyu i kachestvennom analize dinamicheskikh sistem [Symbolic calculations in modeling and qualitative analysis of dynamic systems]. Vychislitel'nye tekhnologii [Computational technologies], 2014, Vol. 19, No. 6, pp. 3–18.
11. Brayton R.K., Moser J.K. A theory of nonlinear networks-1. Quarterly of Appl. Math., 1964, Vol. 22, No.1, pp. 1–33.
12. Yakimov I.M., Abzalova L.R., Kirpichnikov A.P., Mokshin V.V. Kratkii obzor graficheskikh redaktorov strukturnykh modeli slozhnykh system [A brief review of graphical editors of structural models of complex systems]. Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta [The Herald of Kazan Technological University], 2014 Vol. 17, No. 17, pp. 213–221.
13. Okuntsev P.V., Sokolov E.A. Graficheskii redaktor dlya sostavleniya elektricheskikh skhem [Graphic editor for drawing up electrical circuits]. Materialy vosemnadsatoi vserossiiskoi konferentsii Nizhnevartovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the Eighteenth All-Russian Conference of Nizhnevartovsk State University]. Nizhnevartovsk, 2016, pp. 1480–1484.
14. Galetskii F.P. Impul'snyi invertor na tunnel'nykh diodakh [Pulse inverter on tunnel diodes]. Moscow: IPM CE of AS USSR Publ., 1966.
15. Irtegov V., Titorenko T. On modelling and qualitative investigation of nonlinear systems with the aid of computer algebra. Proceedings of the Sixth International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing. Technische Universität München, 2003, pp. 199–211.
16. Titorenko T.N. Issledovanie dinamicheskikh sistem s pomoshch'yu kom'yutera [Study of dynamic systems using a computer]. Trudy IX mezdunarodnoi Chetaevskoi konferentsii «Analiticheskaya mekhanika, ustochivost' i upravlenie dvizheniem» [Proceedings of the IX International Chetaev Conference "Analytical Mechanics, Stability and Motion Control"]. Irkutsk, 2007, Vol. 2, pp. 271–283.
17. Gantmakher F.R. Teoriya matrits [Theory of matrices]. Moscow: Nauka Publ., 1967, 576 p.
18. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustochivosti dvizheniya [The general problem of motion stability]. Moscow-Leningrad: GITL Publ., 1950, 472 p.
19. Chetaev N.G. Ustoichivost' dvizheniya. Raboty po analiticheskoi mekhanike [Stability of motion. Works on analytical mechanics]. Moscow: AS USSR Publ., 1962, 535 p.



20. Kats A.M. K voprosu o kriterii aperiodicheskoi ustoichivosti [On the criterion of aperiodic stability]. Prikladnaya matematika i mehanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1951, Vol. 15, Iss. 1, p. 120.

## Информация об авторах

**Банщикков Андрей Валентинович** – к. ф.-м. н., доцент, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, e-mail: bav@icc.ru

**Ветров Александр Анатольевич** – программист, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, e-mail: vetrov@icc.ru

**Иртегов Валентин Дмитриевич** – д. ф.-м. н., доцент, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, e-mail: irteg@icc.ru

**Титоренко Татьяна Николаевна** – к. т. н., старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, e-mail: titor@icc.ru

## Authors

*Banshchikov Andrei Valentinovich* - Ph.D. in Physics and Mathematics, Assoc. Prof., senior research officer, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Irkutsk, e-mail: bav@icc.ru

*Vetrov Aleksandr Anatol'evich* - programming specialist, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: vetrov@icc.ru

*Irtegov Valentin Dmitrievich* - D. Sc. in Physics and Mathematics, Assoc. Prof., senior research officer, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, e-mail: irteg@icc.ru

*Titorenko Tat'yana Nikolaevna* - Ph.D. in Engineering Science, senior research officer, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, e-mail: titor@icc.ru

## Для цитирования

Банщикков А. В. Анализ электрических цепей средствами компьютерной алгебры в машиноведении / А. В. Банщикков, А. А. Ветров, В. Д. Иртегов, Т. Н. Титоренко // Современные технологии. Системный анализ. – 2018. - Т. 60, № 4. - С. 46–54. - DOI: 10.26731/1813-9108.2018.4(60).46-54

## For citation

Banshchikov A. V., Vetrov A. A., Irtegov V. D., Titorenko T. N. Analiz elektricheskikh tsepei sredstvami komp'yuternoi algebry v mashinovedenii [Analysis of electrical circuits by means of computer algebra in machine science]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [Modern Technologies. System Analysis. Modeling], 2018, Vol. 60, No. 4, pp. 46–54. DOI: 10.26731/1813-9108.2018.4(60).46-54