tekhnicheskaya konferentsiya «Aktual'nye problemy tribologii», Samara, 22-24 noyabrya 2011 [*International scientific and technical conference "Actual problems of tribology", Samara, November 22-24, 2011*]. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk* [*The Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*], Vol. 13, No.4 (3), 2011, pp. 671-675.

Информация об авторах

Анферов Валерий Николаевич – д. т. н., профессор, Сибирский государственный университет путей сообщения, г. Новосибирск, e-mail: avn43@mail.ru

Ткачук Александр Павлович – к. т. н., доцент, Сибирский государственный университет путей сообщения, г. Новосибирск, e-mail: tkachukap@mail.ru

Шишлова Ирина Владиславовна – к. т. н., доцент, Сибирский государственный университет путей сообщения, г. Новосибирск e-mail: shishlovaiv@mail.ru

Authors

Valerii Nikolaevich Anferov – Doctor of Engineering Science, Siberian Transport University, Novosibirsk, e-mail: avn43@mail.ru

Alexandr Pavlovich Tkachuk – Ph.D. in Engineering Science, Associate Professor, Siberian Transport University, Novosibirsk, e-mail: tkachukap@mail.ru

Irina Vladislavovna Shishlova – Ph.D. in Engineering Science, Associate Professor, Siberian Transport University, Novosibirsk, e-mail: shishlovaiv@mail.ru

Для цитирования

Анферов В. Н. Результаты исследований эксплуатационных свойств трансмиссионных масел для спироидных редукторов / В. Н. Анферов, А. П. Ткачук, И. В. Шишлова // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2019. – Т. 64, № 4. – С. 51–57. – DOI: 10.26731/1813-9108.2019.4(64).51-57.

For citation

Anferov V. N., Tkachuk A. P., Shishlova I. V. Rezul'taty issledovaniy ekspluatatsionnykh svoystv transmis-sionnykh masel dlya spiroidnykh reduktorov [The research results of operational properties of transmission oils for spiroid gears]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [*Modern Technologies. System Analysis. Modeling*], 2019. Vol. 64, No. 4. Pp. 51–57. DOI: 10.26731/1813-9108.2019.4(64).51-57.

УДК *531.36* ***DOI:*** *10.26731/1813-9108.2019.4(64).57–64*

М. А. Новиков

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, г.Иркутск, Российская федерация
Дата поступления: *10 октября 2019 г.*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ ЧАСТНОГО ИНТЕГРАЛА

Аннотация. *Изучение многих механических объектов на транспорте можно моделировать тяжелыми твердыми телами. Для их описания удобнее использовать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривая исследуемые объекты покоящимися на платформе, в вагоне или иных движущихся транспортных средствах, изолированными от влияния диссипативных сил, можно считать систему консервативной. При изучении динамических свойств модельных систем можно опираться на свойства известных консервативных систем, предпочтительно автономных. В таких системах существуют первые интегралы уравнений движения. Среди консервативных систем наиболее популярна задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В самом общем виде для нее известны первые интегралы: полной энергии, момента количества движения, ингеграл Пуассона. Для трех хорошо изученных случаев существования четвертого общего интеграла известны основные динамические свойства систем: записаны аналитические решения в форме эллиптических или гиперэллиптических функций, найдены асимптотики решений, выделены стационарные движения, проведены исследования их устойчивости в каждом случае. В настоящее время интерес к исследованию привлекают автономные консервативные системы с частным интегралом. Хотя систем с такими интегралами довольно много, прежде всего, изучению подлежит частный интеграл Гесса. В предложенной статье проведено исследование устойчивости стационарных движений твердого тела вокруг неподвижной точки в случае существования частного интеграла Гесса. Одним из стационарных движений рассматривается состояние покоя. Оно является наиболее распространенным на транспорте. При расположении центра масс выше начала координат (осями координат выбраны главные оси тела) показана неустойчивость состояния покоя. Это свойство установлено из существования корней характеристического уравнения возмущенного движения с положительной вещественной частью. Достаточные условия устойчивости устанавливаются вторым методом Ляпунова – построением знакоопределенных функций Ляпунова. В случае центра масс ниже оси координат получено совпадение достаточных условий устойчивости с необходимыми. В этом случае достаточные условия устойчивости устанавливаются линейными слагаемыми дифференциальных уравнений движения. Для перманентного вращения проведено исследование необходимых условий устойчивости в случаях вырождений характеристического уравнения, составленного по матрице линейной части дифференциальных уравнений возмущенного движения. Показано, что вырождения возникают при выполнении равенства Аппельрота, когда существует дополнительный частный интеграл Гесса; без дополнительного интеграла при существовании некоторого соответствия между статическими и динамическими параметрами системы; при одновременном выполнении первых двух случаев. Во всех изученных случаях не накладывается каких-либо дополнительных ограничений на параметры системы, кроме требования к моментам инерции твердого тела. При обработке символьной информации применяется система аналитических вычислений на*

персональных компьютерах.

Ключевые слова: *устойчивость движения, интеграл уравнений движения, связка интегралов, характеристическое уравнение, собственное значение.*

M. A. Novickov

Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosova SB RAS, Irkutsk, the Russian Federation
Received: *October 10, 2019*

ON THE STABILITY OF STEADY-STATE MOTIONS OF TRANSPORT SYSTEMS IN THE CASE OF EXISTENCE OF A PARTIAL INTEGRAL

Abstract. *Many transport mechanical objects in course of investigations may be modeled by heavy solid bodies. It is more convenient to describe them using systems of ordinary differential equations. When considering investigated objects being at rest on the platform, in a car or some other moving transport vehicles, i.e. isolated from the influence of the dissipative forces, it is possible to consider the system as conservative. In the process of dynamic properties of model systems, it is possible to rely upon the properties of known conservative systems, preferably autonomous ones. There are first integrals of equations of motions in such systems. Among problem statements for conservative systems, the most popular is the problem about rotation of a solid body around a fixed point. In the most general form, there are first integrals known for it: integrals of total energy, integrals of the moment of impulse, Poisson's integral. As far as the three properly studied cases of existence of the fourth general integral are concerned, the following main dynamic properties of systems are known: analytical solutions are written in the form of elliptic or hyperelliptic functions, with asymptotics of the solutions found and stationary motions distinguished. Investigations of their stability have been conducted for each particular case. Presently, the interest of researchers is drawn to to investigation of autonomous conservative systems with partial integral. Despite the fact that there are many systems with such integrals, the Hess partial integral is to be studied above all. The present paper considers the investigation of stability of steady-state motions of the solid body around a fixed point in the case of existence of the Hess partial integral. The state of rest is considered as a form of steady-state motions. The state of rest is the most usual for transport. The position of the mass center above the origin (the main axes of the body are chosen as the coordinate axes) corresponds to instability of the state of rest. This property follows from the existence of roots of the characteristic equation of disturbed motion with the positive real part. Sufficient conditions of stability are defined by Lyapunov's second method by the constructing of fixed sign Lyapunov functions. In the case, when the mass center is lower than the coordinate axis, we have obtained coincidence of the sufficient stability conditions with the necessary ones. In this case, sufficient stability conditions are determined by linear terms of differential equations of motion. For the case of permanent rotation, we have conducted an investigation of necessary stability conditions in cases of degenerations of the characteristic equation composed on the basis of the matrix of the linear parts of differential equations of disturbed motion. It has been shown that degenerations arise in the following cases: 1) in satisfying the Appelrott equality, when there exists an additional partial Hess integral; 2) without any additional integral, in case when there exists some correspondence between static and dynamic parameters of the system; 3) in case when the above two cases are satisfied simultaneously. In all the cases considered above, there are no additional constraints imposed on the system's parameters, besides the requirement to the inertia moments of the solid body. In the process of processing symbolic information, we have applied a system of analytical computations on personal computers.*

Keywords: *stability of motion, integral of equations of votion, bundle of integrals, equations of motion, characteristic equation, eigenvalue.*

Введение

Полный анализ механических транспортных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, включает выделение и исследование устойчивости стационарных движений. Наиболее эффективно проведение устойчивости вторым методом Ляпунова [1, 2]. Функции Ляпунова в автономных консервативных системах основаны на построении знакоопределенных связок Четаева [2], составленных из первых интегралов возмущенного движения. Этот способ успешно применяется в задаче о вращении вокруг неподвижной точки твердого тела [3–5]. При существовании четырех общих интегралов в случаях Эйлера, Лагранжа, Ковалевской составлены общие решения уравнений движения [6], достаточно полно изучены основные динамические свойства систем.

Для них также выделены стационарные движения и проведено исследование их устойчивости [2, 7–11]. Очевидно, что при большем количестве известных первых интегралов могут быть получены более мягкие достаточные условия устойчивости. Вместе с тем первыми интегралами можно рассматривать не только общие, но и частные интегралы. В монографии В.В. Голубева [6] приведены системы, в которых вместе с общими интегралами (энергии, кинетического момента и интегралом Пуассона) участвуют дополнительные частные интегралы. В статье А.В. Беляева [12] исследовались топологические свойства решений систем с частным интегралом Гесса и приводилось расширенное описание асимптотик особых точек решений.

Интерес представляет исследование условий устойчивости стационарных движений. Вместе с тем важно провести сравнение достаточных условий устойчивости с необходимыми, определить порядок нелинейной правой части системы дифференциальных уравнений, на котором устанавливается устойчивость.

Полученные интегральными связками Четаева достаточные условия устойчивости стационарных движений часто с точностью до границы совпадают с необходимыми. Иногда на границе устойчивости с привлечением нелинейных членов правой части системы дифференциальных уравнений движения удается построить знакоопределенную неоднородную функцию Ляпунова [13, 14]. И тогда достаточные условия устойчивости в точности совпадают с необходимыми. Основой этого анализа также является второй метод Ляпунова [1], где используются неоднородные функции Ляпунова.

В современных практических исследованиях возникает необходимость в многочисленных вычислениях, что опирается на системы аналитических вычислений на современных вычислительных средствах.

Постановка задачи

Рассматривается механическая автономная консервативная система, описываемая дифференциальными уравнениями движения:

$$\begin{cases} A\dot{p} = (B-C)qr + z_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_2 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ B\dot{q} = (C-A)rp + x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} = (A-B)pq - x_0\gamma_1, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $x_0 \neq 0 \neq z_0$; A, B, C – моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, □, r – проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси; x_0, z_0 – координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции ортов подвижных осей на неподвижную вертикальную ось Oz [6].

Для системы (1.1) известны первые общие интегралы [6]:

$$V_0 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2x_0\gamma_1 + 2z_0\gamma_3 = const,$$

$$V_1 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = const,$$

$$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

При выполнении известного равенства Апельрота [6]

$$AC(x_0^2 + z_0^2) = B(Ax_0^2 + Cz_0^2) \qquad (1.2)$$

система (1.1) допускает линейный частный интеграл Гесса, записанный в аналитическом виде

$$V_3 = Ax_0 p + Cz_0 r = 0. \qquad (1.3)$$

Для системы (1.1) при существовании интеграла (1.3) проведем исследование устойчивости некоторых стационарных движений [15]:

$$1)\, p_0 = 0;\, q_0 = 0;\, r_0 = 0;$$

$$\gamma_{10} = x_0\sqrt{x_0^2 + z_0^2};\, \gamma_{20} = 0;\, \gamma_{30} = z_0\sqrt{x_0^2 + z_0^2}, \qquad (1.4)$$

$$2)\, p_0 = 0;\, q_0 = 0;\, r_0 = 0;$$

$$\gamma_{10} = -x_0\sqrt{x_0^2 + z_0^2};\, \gamma_{20} = 0;\, \gamma_{30} = -z_0\sqrt{x_0^2 + z_0^2}, \qquad (1.5)$$

$$3)\, p_0 = \frac{-z_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{C(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{A(A-C)x_0z_0}};\, q_0 = 0;$$

$$r_0 = \frac{x_0}{\sqrt[4]{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}}\sqrt{\frac{A(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{C(A-C)x_0z_0}};\, \gamma_{20} = 0;$$

$$\gamma_{10} = \frac{-Cz_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}};\, \gamma_{30} = \frac{Ax_0}{\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}};$$

$$A > C;\, x_0z_0 > 0. \qquad (1.6)$$

Движения (1.4) и (1.5) являются состояниями покоя. Отличие состоит лишь в расположении центра масс относительно начала координат.

В статье интерес представляет исследование устойчивости трех выделенных стационарных движений.

Исследование устойчивости состояния покоя, необходимые условия устойчивости

При исследовании положений равновесия (1.4) и (1.5) проверим вначале необходимые условия устойчивости. Составим отклонения:

$$x_1 = p;\, x_2 = q;\, x_3 = r,\, x_4 = \gamma_1 - \gamma_{10};$$

$$x_5 = \gamma_2;\, x_6 = \gamma_3 - \gamma_{30}.$$

Матрица правой части линеаризованных дифференциальных уравнений возмущенного движения примет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_0}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-z_0}{B} & 0 & \frac{x_0}{B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-x_0}{C} & 0 \\ 0 & -\gamma_{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{30} & 0 & -\gamma_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение упомянутой матрицы $f_1(\lambda) = det(D_1 - \lambda E) = 0$ получается:

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 f_0(\lambda) = 0, \text{ где } f_0(\lambda) =$$

$$= \lambda^4 - \frac{A(B+C)x_0^2 + C(A+B)z_0^2}{ABC\sqrt{x_0^2 + z_0^2}}\lambda^2 + \frac{Ax_0^2 + Cz_0^2}{ABC}.$$

Таким выражением получается $f_0(\lambda)$ при подстановке значений γ_{10}, γ_{30} стационарного движения (1.4).

В последнем полиноме имеется отрицательный коэффициент при λ^2. Следовательно, среди решений биквадратного уравнения относительно λ будут два решения с положительной вещественной частью (уравнение $f_0(\lambda)=0$ имеет четыре вещественных корня). Тогда по соответствующей теореме Ляпунова [1] стационарное движение (1.4) неустойчиво.

Для положения покоя (1.5) имеем $f_0^{(1)}(\lambda)=$

$$=\lambda^4+\frac{A(B+C)x_0^2+C(A+B)z_0^2}{ABC\sqrt{x_0^2+z_0^2}}\lambda^2+\frac{Ax_0^2+Cz_0^2}{ABC}.$$

Дискриминант биквадратного уравнения равен

$$d_1=\frac{[A(B-C)x_0^2+C(B-A)z_0^2]^2}{(ABC)^2(x_0^2+z_0^{2)}}>0.$$

Легко видеть, что для уравнения $f_0^{(1)}(\lambda)=0$ все корни будут чисто мнимыми. Притом их кратность допускается при выполнении условия Аппельрота (1.2).

Достаточные условия устойчивости

В возмущениях для стационарного движения (1.5) первые интегралы запишутся:

$$\begin{cases} \tilde V_0=Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+2(x_0x_4+z_0x_6)=const,\\ \tilde V_1=Ax_1x_4+Bx_2x_5+Cx_3x_6-\dfrac{Ax_0x_1+Cz_0x_6}{\sqrt{x_0^2+z_0^2}}=const,\\ \tilde V_2=x_4^2+x_5^2+x_6^2-\dfrac{2(x_0x_4+z_0x_6)}{\sqrt{x_0^2+z_0^2}}=0,\\ \tilde V_3=Ax_0x_1+Cz_0x_3=0. \end{cases}$$

Исключение некоторых переменных из интегралов с фиксированными константами $\tilde V_2=0, \tilde V_3=0$ позволит уменьшить число переменных системы. При подстановке в общие интегралы $\tilde V_0=const$ и $\tilde V_1=const$ получаются выражения в виде рядов от четырех переменных. Учитывая возможность существования интеграла Гесса (1.3) и при $p_0=0=r_0$ [6], в общем случае не будем использовать равенство (1.2).

Составим из $\tilde V_3=0$ выражение связи между переменными $x_3=-Ax_0/(Cz_0)x_1$, а из $\tilde V_2=0$ в окрестности начала координат можно выразить решение одной переменной в виде ряда от остальных переменных:

$$x_6=-\frac{x_0}{z_0}x_4+\frac{\sqrt{x_0^2+z_0^2}}{2z_0}\left(x_4^2+\frac{x_0^2}{z_0^2}x_4^2+x_5^2\right)+\ldots,$$

где многоточием обозначены слагаемые более высоких порядков. При подстановке их в интегралы $\tilde V_0=const$ и $\tilde V_1=const$ выделим квадратичные части по переменным x_1,x_2,x_4,x_5 с соответствующими матрицами:

$$M_1=\begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & B & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_{33}^{(1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{x_0^2+z_0^2}\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{13}^{(2)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & B\\ m_{13}^{(2)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & B & 0 & 0\end{pmatrix},$$

где

$m_{11}^{(1)}=A(Ax_0^2+Cz_0^2)/Cz_0^2; m_{33}^{(1)}=\sqrt{(x_0^2+z_0^2)^3}/z_0^2;$

$m_{13}^{(2)}=A(x_0^2+z_0^2)/z_0^2$.

Легко увидеть, что квадратичная форма $x'M_1x$ положительно определена, тогда по теореме Ляпунова [1] стационарное движение (1.5) устойчиво по переменным p,q,γ_1,γ_2. Так как малым приращениям x_4,x_5 из $\tilde V_2=0$ соответствует бесконечно малое приращение x_6, то положение покоя (1.5) устойчиво и по переменной γ_3 [13]. Точно так же из уравнения $\tilde V_3=0$ ввиду непрерывной зависимости x_3 от x_1 следует устойчивость по r. Таким образом, состояние покоя (1.5) устойчиво по всем своим переменным.

Исследование устойчивости перманентного вращения

Следует отметить, что перманентное вращение (1.6) существует не только при выполнении равенства Аппельрота, но и когда для системы (1.1) не имеется интеграла Гесса. Поэтому проведем анализ хотя бы необходимых условий устойчивости. Для движения (1.6) составим отклонения:

$$x_1=p;\ x_2=q;\ x_3=r,\ x_4=\gamma_1-\gamma_{10};$$
$$x_5=\gamma_2;\ x_6=\gamma_3-\gamma_{30}.$$

Тогда матрица линейной части дифференциальных уравнений возмущенного движения будет следующей:

$$D_2=\begin{pmatrix} 0 & d_{12} & 0 & 0 & z_0/A & 0\\ d_{21} & 0 & d_{23} & -z_0/B & 0 & x_0/B\\ 0 & d_{32} & 0 & 0 & -x_0/C & 0\\ 0 & -\gamma_{30} & 0 & 0 & r_0 & 0\\ \gamma_{30} & 0 & -\gamma_{10} & -r_0 & 0 & p_0\\ 0 & \gamma_{10} & 0 & 0 & -p_0 & 0\end{pmatrix},$$

где $d_{12} = \dfrac{(B - C)r_0}{A}$; $d_{21} = \dfrac{(C - A)r_0}{B}$;

$d_{23} = \dfrac{(C - A)p_0}{B}$; $d_{32} = \dfrac{(A - B)p_0}{C}$.

Характеристическое уравнение для матрицы D_2 примет вид: $f_2(\lambda) =$

$$= det(D_2 - \lambda E) = \lambda^2(\lambda^4 + a_4\lambda^2 + a_2) = 0, \quad (3.1)$$

где $a_4 = \dfrac{b_{41}}{b_{42}}$; $a_2 = \dfrac{b_{21}}{b_{22}}$; $b_{41} = A^2(2AB - AC -$

$- BC + C^2)x_0^4 + AC(2A^2 + AB - AC + BC +$

$+ 2C^2)x_0^2 z_0^2 + C^2(A^2 - AB - AC + 2BC)z_0^4$;

$b_{42} = ABC(A - C)\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}\, x_0 z_0 > 0$;

$b_{21} = (Ax_0^2 + Cz_0^2)[A(B - C)x_0^2 + C(B - A)z_0^2] \times$

$[A^3x_0^4 - 4AC(A - C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4]$;

$b_{22} = A^2BC^2(A - C)(A^2x_0^2 + C^2z_0^2)x_0^2z_0^2 > 0$.

В неособых случаях при $a_2 \neq 0$ анализ устойчивости аналогичен [16]. Рассмотрим здесь особые случаи, когда возникает ситуация $a_2 = 0$. Это осуществляется при обращении в нуль квадратной скобки выражения b_{21}:

– при выполнении равенства

$$A(B-C)x_0^2 + C(B-A)z_0^2 = 0;$$

– при выполнении равенства

$$A^3x_0^4 - 4AC(A-C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4 = 0;$$

– возможное одновременное выполнение первого и второго равенств.

Очевидно, первое условие является равенством Аппельрота и соответствует частному интегралу Гесса. Второе равенство

$$\varphi(A, C, x_0, z_0) = A^3x_0^4 - 4AC(A - C)x_0^2z_0^2 - C^3z_0^4 = 0 \quad (3.2)$$

не соответствует дополнительному частному интегралу и накладывает лишь ограничения для получения наименьшего ранга матрицы D_1. Третье условие соответствует существованию частного интеграла Гесса при одновременном выполнении равенств Аппельрота и (3.2). Рассмотрим их в отдельности.

Необходимые условия устойчивости перманентного вращения при существовании равества Аппельрота

После исключения величины B из (1.2) характеристическое уравнение (3.1) упрощается:

$$f_{21}(\lambda) = \lambda^4(\lambda^2 + a_{41}) = 0, \quad (3.3)$$

где $a_{41} = \dfrac{(Ax_0^2 + Cz_0^2)}{AC(A - C)x_0z_0(x_0^2 + z_0^2)\sqrt{A^2x_0^2 + C^2z_0^2}} \times$

$\times [A^2x_0^4 + 2(2A^2 - 3AC + 2C^2)x_0^2z_0^2 + C^2z_0^4]$.

Здесь первый множитель числителя и знаменатель выражения a_{41} положительны для рассматриваемой прецессии при $A > C$; $x_0 z_0 > 0$. В квадратной скобке выражение $2A^2 - 3AC + 2C^2 > 0$ как положительно определенная квадратичная форма по переменным A, C. Тогда $a_{41} > 0$ для всех вещественных A, C, x_0, z_0. Отсюда не следует явных заключений о неустойчивости, хотя нулевой четырехкратный корень характеристического уравнения имеет не все простые элементарные делители. Вопрос устойчивости в таких случаях не очевиден [17–18], и он решается привлечением нелинейных слагаемых систем (1.1).

Существование критических корней уравнения (3.3) выполнены без каких-либо условий, и единственным ограничением механической системы (1.1) могут быть только требования к моментам инерции твердого тела:

$$A + B > C; \quad A + C > B; \quad B + C > A. \quad (3.4)$$

Здесь первое неравенство выполняется тождественно ввиду $A > C$ для рассматриваемого перманентного вращения (1.6). При равенстве Аппельрота для исследуемого движения имеется оценка – $A > B > C$. Действительно, из соотношения $C(x_0^2 + z_0^2) < Ax_0^2 + Cz_0^2$ после домножения на положительное число $A/(Ax_0^2 + Cz_0^2)$ получим $AC(x_0^2 + z_0^2)/(Ax_0^2 + Cz_0^2) = B < A$. Точно так же из неравенства $A(x_0^2 + z_0^2) > Ax_0^2 + Cz_0^2$ после домножения на $C/(Ax_0^2 + Cz_0^2) > 0$ получим $B > C$. Третье неравенство $B + C > A$ при подстановке B из (1.2) приводит к неравенству:

$$C^2 z_0^2 > A(A - 2C)\, x_0^2, \quad (3.5)$$

которое выполняется тождественно для значений $C < A \leq 2C$.

Оставляя без рассмотрения достаточные условия устойчивости в этом случае, можно заключить, что необходимые условия устойчивости с учетом (3.5), которое имеет отношение только к существованию твердого тела, выполняются без всяких ограничений.

Необходимые условия устойчивости перманентного вращения при выполнении равенства (3.2)

В этом особом случае для уравнения $\varphi(A, C, x_0, z_0) = 0$ запишем решение:

$$x_0 = \pm \frac{z_0\sqrt{C}\sqrt{2(A - C) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}}}{A}. \quad (3.6)$$

Тогда характеристическое уравнение (3.1) будет записано в виде:

$$f_{22}(\lambda) = \lambda^4(\lambda^2 + a_{42}) = 0,$$

где

$$a_{42} = \frac{G_1}{G_2};\ G_1 = 5A^4 - 21A^3C + 35A^2C^2 - 27AC^3 +$$
$$+8C^4 + B[(17A^3 - 36A^2C + 29AC^2 - 8C^3) +$$
$$\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}[2A^3 - 8A^2C + 10AC^2 - 4C^3 +$$
$$B(9A^2 - 11AC + C^2)]];$$
$$G_2 = A^2B(A-C)\ \sqrt{2(A-C) + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}} \times$$
$$\times \sqrt{2A - C + \sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}}\ .$$

Здесь $G_2 > 0$ как произведение только положительных величин. Выражение G_1 состоит из слагаемых разных знаков, поэтому представим его разложенным по степеням $(A-C) > 0$:

$$B\{17(A-C)^3 + 15C(A-C)^2 + 8C^2(A-C) + 2C^3 +$$
$$+\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}[9(A-C)^2 + 7C(A-C) + 2C^2]\}$$
$$+(A-C)^2\ [5(A-C)^2 - C(A-C) + 2C^2 +$$
$$+2(A-2C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2}\,].$$

Считая $B > 0$ и удовлетворяющим требованию (3.4), можно убедиться, что соответствующий коэффициент в фигурной скобке положительный, как состоящий из всех положительных слагаемых. В последней квадратной скобке рациональная часть положительна как $5[A - C - C/10]^2 + 39C^2/20$. Иррациональная часть положительна при $A > 2C$, и отрицательна при $C < A < 2C$. В этом случае для определения знака их суммы сравним модули рациональной и иррационалной частей выражения. Для этого из квадрата рациональной части вычтем квадрат иррациональной части. Разность получается равной $9A^2(A-C)^2 > 0$.

Следовательно, последняя квадратная скобка положительна при всех $A > C, x_0z_0 > 0$. Окончательно получается $a_{42} > 0$. Таким образом, необходимые условия устойчивости перманентного вращения (1.6) при равенстве (3.2) не имеют каких-либо ограничений, кроме требования к моментам инерции твердого тела (3.5).

Необходимые условия устойчивости при выполнении равенств Аппельрота и $\varphi(A, C, x_0, z_0) = 0$

В этом случае характеристическое уравнение (3.1) так же имеет четырехкратный нулевой корень с не всеми простыми элементарными делителями и два чисто мнимых корня. Очевидно, при $C < A \le 2C$ должна выполняться только зависимость (3.6). В остальных ситуациях при $A > C$ проверим одновременное выполнение соотношений (3.5) и (3.6). При $A > 2C$ для этого должно выполняться неравенство:

$$g_1 = AC - 2(A-C)(A-2C) >$$
$$> (A-2C)\sqrt{4A^2 - 7AC + 4C^2} = g_2\,.$$

Левая часть неравенства положительна при $C < A < (7 + \sqrt{17})C/4$. Легко вычислить $g_2^2 - g_1^2 = -AC(A-C)(5A-12C)$. Здесь правая часть последнего равенства положительна при $C < A < 12/5C$. Выбирая из вычисленных значений для A общее решение, получим в рассматриваемой ситуации $A > 2C$ выполнение соотношений (3.5) и (3.6) при значениях $2C < A < 12/5C$.

Окончательно для одновременного выполнения равенств Аппельрота и (3.2) необходимо выполнение условия:

$$C < A < \frac{12}{5}C.$$

Таким образом, во всех особых случаях (при возникновении четырехкратного нулевого корня характеристического уравнения) не существует каких-либо ограничений на динамические и статические параметры системы (1.1). В таком случае есть основания допускать устойчивость перманентного вращения (1.6), хотя окончательно этот вопрос может быть решен получением достаточных условий устойчивости в каждом из перечисленных трех случаев.

Заключение

Проведенные вычислительные выкладки показали решение вопроса устойчивости первых двух положений равновесия Гесса. Для первого состояния покоя (1.4) показана неустойчивость, и она следует из существования положительного корня характеристического уравнения, составленного для матрицы линейной правой части (1.1) возмущенного движения. Другое состояние покоя (1.5) устойчиво, при этом достаточные условия устойчивости в точности совпадают с необходимыми. Как показано вычислениями, они устанавливаются только линейной частью дифференциальных уравнений движения (1.1). Можно видеть, что устойчивое положение покоя существует при положении центра масс ниже начала координат.

Для перманентного вращения (1.6) исследованы только особые случаи устойчивости, когда матрица линейной части возмущенного движения имеет наименьший ранг. Необходимые условия устойчивости в этом случае не зависят от расположения центра масс относительно начала координат.

В рассмотренных трех особых случаях не существует каких-либо дополнительных условий для существования нулевых и чисто мнимых корней характеристического уравнения матрицы линейной части возмущенного движения.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект N 19-0-00746).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Т. 2. М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
2. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М. : Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М. : ГИФМЛ, 1960. 487 с.
4. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика. Ижевск : Удмурдский университет, 1999. 584 с.
5. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М. : Наука, 1971. 635 с.
6. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М. : Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
7. Белецкий В.В. Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновом поле сил // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 749–758.
8. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. Вып. 4. С. 457–458.
9. Румянцев В.В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 51–66.
10. Румянцев В.В. К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки // Прикладная математика и механика. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 339–345.
11. Савченко А.Я. Устойчивость равномерных вращений гироскопа С.В. Ковалевской // Механика твёрдого тела. Киев : Наукова думка, 1972. Вып. 4. С. 48–51.
12. Беляев А.В. Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // Математический сборник. 2015. Т. 206. № 5. С. 5–34.
13. Румянцев В.В. Сравнение трёх методов построения функций Ляпунова // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
14. Новиков М.А. Об устойчивости перманентных вращений твердого тела вокруг неподвижной точки в задаче Бруна // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 261–265.
15. Новиков М.А. О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса // Изв. РАН. Сер.: Механика твердого тела. 2018. № 3. С. 28–37
16. Новиков М.А. Об устойчивости стационарного движения механической консервативной системы // Вестник Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. 2018. № 3. С. 22–38.
17. Каменков Г.В. Устойчивость движения, колебания, аэродинамика. Т. 1. М. : Наука, 1971. 255 с.
18. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Т. 2. М. : Наука, 1972. 213 с.

REFERENCES

1. Lyapunov A.M. Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya. Sobranie sochinenii [The general problem of traffic stability. Collected works]. Vol. 2. Moscow-Leningrad: AN SSSR Publ., 1956, pp. 7-263
2. Chetaev N.G. Ustoichivost' dvizheniya. Raboty po analiticheskoi mekhanike [Traffic stability. Works on analytical mechanics]. Moscow: AN SSSR Publ., 1962. 535 p.
3. Appel' P. Teoreticheskaya mekhanika [Theoretical Mechanics]. Vol.2. Moscow: GIFML Publ., 1960. 487 p.
4. Uitteker E. T. Analiticheskaya dinamika [Analytical dynamics]. Izhevsk: Udmurdskii universitet Publ., 1999. 584 p.
5. Pars L.A. Analiticheskaya dinamika [Analytical dynamics]. Moscow: Nauka Publ., 1971. 635 p.
6. Golubev V.V. Lektsii po integrirovaniyu uravnenii dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki [Lectures on the integration of equations of motion of a heavy solid near a fixed point]. Moscow: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2002. 287 p.
7. Beletskii V.V. Nekotorye voprosy dvizheniya tverdogo tela v n'yutonovom pole sil [Some questions of the motion of a rigid body in a Newtonian field of forces] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1957. Vol. 21. Iss. 6, pp. 749-758
8. Rumyantsev V.V. Ob ustoichivosti vrashcheniya tyazhelogo tverdogo tela s odnoi nepodvizhnoi tochkoi v sluchae S. V. Kovalevskoi [On the stability of rotation of a heavy solid body with one fixed point in the case of S. V. Kovalevskaya]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1954. Vol. 18. Iss. 4, pp. 457-458
9. Rumyantsev V.V. Ustoichivost' permanentnykh vrashchenii tyazhelogo tverdogo tela [The stability of permanent rotations of a heavy solid]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1956. Vol. 20. Iss. 1, pp. 51-66.
10. Rumyantsev V.V. K ustoichivosti permanentnykh vrashchenii tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki [On the stability of permanent rotations of a rigid body near a fixed point]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1957. Vol. 21. Iss. 3, pp. 339-345
11. Savchenko A.Ya. Ustoichivost' ravnomernykh vrashchenii giroskopa S.V. Kovalevskoi [Stability of uniform rotations of the Kovalevskaya gyroscope] In the book: Mekhanika tverdogo tela [Solid body mechanics]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1972. Iss. 4, pp. 48-51
12. Belyaev A.V. Ob obshchem reshenii zadachi o dvizhenii tyazhelogo tverdogo tela v sluchae Gessa [On the general solution of the problem of the motion of a heavy solid body in the Hess case]. Matematicheskii sbornik [Sbornik: Mathematics], 2015, Vol. 206, No. 5, pp. 5-34

13. Rumyantsev V.V. Sravnenie trekh metodov postroeniya funktsii Lyapunova [Comparison of three methods for constructing Lyapunov functions]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1995. Vol. 59. Iss. 6, pp. 916-921

14. Novikov M.A. Ob ustoichivosti permanentnykh vrashchenii tverdogo tela vokrug nepodvizhnoi tochki v zadache Bruna [On the stability of permanent rotations of a solid body around a fixed point in the Brun problem]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 1994. Vol. 58. Iss. 5, pp. 261-265

15. Novikov M.A. O statsionarnykh dvizheniyakh tverdogo tela pri sushchestvovanii chastnogo integrala Gessa [On stationary motions of a solid body with the existence of a private Hess integral]. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [The bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid body mechanics], 2018. No. 3, pp. 28-37

16. Novikov M.A. Ob ustoichivosti statsionarnogo dvizheniya mekhanicheskoi konservativnoi sistemy [On the stability of stationary motion of a mechanical conservative system]. Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika [Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, computer science], 2018, N. 3, pp. 22-38.

17. Kamenkov G.V. Ustoichivost' dvizheniya, kolebaniya, aerodinamika [Stability of motion, vibrations, aerodynamics]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1971, 255 p.

18. Kamenkov G.V. Ustoichivost' i kolebaniya nelineinykh sistem [Stability and vibrations of nonlinear systems]. Vol. 2. Moscow: Nauka Publ., 1972, 213 p.

Информация об авторах

Новиков Михаил Алексеевич – д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Учреждение Российской Академии наук, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, e-mail: nma@icc.ru

Authors

Mikhail Alekseevich Novikov – Dr. Sc. in Physics and Mathematics, Senior Research Officer, Institution of the Russian Academy of Sciences, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, SB RAS, e-mail: nma@icc.ru

Для цитирования

Новиков М. А. Об устойчивости стационарных движений транспортных систем при существовании частного интеграла // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2019. – Т. 64, № 4. – С. 57–64. – DOI: 10.26731/1813-9108.2019.4(64).57–64.

For citation

Novickov M. A. Ob ustoychivosti statsionarnykh dvizheniy transportnykh sistem pri sushchestvovanii chastnogo integrala [On the stability of steady-state motions of transport systems in the case of existence of a partial integral]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie* [*Modern Technologies. System Analysis. Modeling*], 2019. Vol. 64, No. 4. Pp. 57–64. DOI: 10.26731/1813-9108.2019.4(64).57–64.